

**Л. СЕГЕРЛИНД**

**ПРИМЕНЕНИЕ  
МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**











# Applied Finite Element Analysis

Larry J. Segerlind  
Associate Professor  
Department of Agricultural Engineering  
Michigan State University

---

John Wiley and Sons, Inc.  
New York/London/Sydney/Toronto  
1976

Л. СЕГЕРЛИНД

---

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Перевод с английского  
канд. физ.-мат. наук  
А. А. ШЕСТАКОВА

под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук  
Б. Е. ПОБЕДРИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МИР»  
Москва 1979

Книга представляет собой руководство по широко используемому в настоящее время методу конечных элементов, позволяющему получать численные решения инженерных, физических и математических задач. Детальное обсуждение основных идей метода сопровождается примерами, иллюстрирующими технику его применения. Приводится большое число простых программ, написанных на алгоритмическом языке ФОРТРАН и служащих учебным целям.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов, специалистов в области механики сплошных сред, физиков, математиков, а также для аспирантов и студентов старших курсов технических вузов.

*Редакция литературы по новой технике*

1702070000

С 20204—171  
041(01) — 79 171—79

Copyright © 1976 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved. Authorized translation from English language edition, published by John Wiley & Sons, Inc.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1979.

---

Л. Сегерлинд

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ст. научный редактор Л. Якименко. Мл. научный редактор Е. Орлова. Художник Е. Самойлов. Художественный редактор Л. Безрученков. Технический редактор Г. Алюлина. Корректор В. Соколов

ИБ № 1259

Сдано в набор 19.07.78. Подписано к печати 08.02.79  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага кн. журн.  
Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 12,25 бум. л.  
Усл. печ. л. 24,50. Уч.-изд. л. 21,10. Тираж 12000 экз. Зак. 763  
Цена 1 р. 80 к.

Издательство «Мир» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, 113105, Нагатинская ул., д. 1.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Перед каждым вычислителем стоит проблема — получить решение важной практической задачи с наименьшими затратами машинного времени и наперед заданной точностью.

В подходе к решению указанной проблемы можно выделить два направления: математическое (теоретическое) и инженерное (практическое). Эти направления можно проследить на одном из самых распространенных и «модных» в настоящее время методов решения задач математической физики — методе конечных элементов (МКЭ). Представители первого направления (теоретики) часто называют этот метод вариационно-разностным, подчеркивая тем самым его математическую природу. Они занимаются математическим обоснованием МКЭ, т. е. проводят теоретический анализ его сходимости и точности реализации. Представители же второго направления (инженеры) решают довольно сложные технические задачи, часто не задумываясь над строгим обоснованием применяемых ими приемов. Однако, чтобы не получить «кота в мешке», они проверяют работу построенных алгоритмов и программ на известных точных решениях.

Наиболее полно отражают современное состояние первого и второго направлений соответственно книги Г. Стренга и Дж. Фикса [1] и О. Зенкевича [2]. Эти направления интенсивно развиваются, взаимно дополняя и обогащая друг друга.

Предлагаемая советскому читателю книга Л. Сегерлинда не содержит существенно новых результатов ни по первому, ни по второму направлениям. Тем не менее она окажет несомненную пользу широкому кругу читателей, ибо представляет собой хороший самоучитель по МКЭ. Она предназначена для всех, кто хочет овладеть практическими основами МКЭ, «набить руку» в решении простейших задач. Проработав данную книгу, читатель легко справится с составлением сложной программы для интересующей его задачи и сможет изучать тонкие вопросы МКЭ по монографиям и периодической литературе.

Следует отметить, что автор ссылается в основном на работы американских авторов, хотя большой вклад в развитие МКЭ внесли советские исследователи [6—8, 13—17] и ученые других стран [3]; отметим, например, работы французских математиков

[4, 5]. Идеи метода конечных элементов используются советскими учеными при решении различных технических проблем [9—12].

Мы надеемся, что эта книга будет с интересом принята студентами, аспирантами, инженерами и научными сотрудниками самых различных областей науки и техники.

*Б. Е. Победря*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
3. Метод конечных элементов в строительной механике и механике сплошных сред, Библиографический указатель. Зарубежная литература, 1970—1972, Л., вып. 1—2, 1973.
4. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
5. Ciarlet P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
6. Розин Л. А., Основы метода конечных элементов в теории упругости. Л., изд-во ЛПИ, 1972.
7. Розин Л. А. Метод конечных элементов в приложении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977.
8. Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, изд-во ЛГУ, 1977.
9. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приближение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. — М.: Высшая школа, 1974.
10. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — М.: Судостроение, 1974.
11. Александров А. В. и др. (под общей редакцией А. Ф. Смирнова). Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ. — М.: Стройиздат, 1976, ч. 1, ч. 2.
12. Слесарев И. С., Сиротин А. М. Вариационно-разностные схемы в теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978.
13. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Сб. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Вильнюс, вып. 5, 1973, вып. 8, 1974.
14. Михлин С. Г. Вариационно-сеточная аппроксимация. Сб. «Численные методы и автоматическое программирование». Записки научных семинаров ЛОМИ. — М.: Наука, т. 48, 32—188, 1974.
15. Дьяконов Е. Г. Проекционно-разностные и разностные методы решения нелинейных стационарных задач теории упругости и пластичности. Сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 7, № 5, 14—78, 1976.
16. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
17. Дьяконов Е. Г. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов. Вестник Московского университета, Сер. «Вычислительная математика и кибернетика», № 2, 3—19, 1977.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод конечных элементов представляет собой эффективный численный метод решения инженерных и физических задач. Область его применения простирается от анализа напряжений в конструкциях самолетов или автомобилей до расчета таких сложных систем, как атомная электростанция. С его помощью рассматривается движение жидкости по трубам, через плотины, в пористых средах, исследуется течение сжимаемого газа, решаются задачи электростатики и смазки, анализируются колебания систем.

Эту книгу следует рассматривать как введение в метод конечных элементов в том его виде, как он применяется к задачам непрерывного типа. В ней приводятся основные идеи метода и способы их реализации. Изложенного материала более чем достаточно для первоначального ознакомления с методом студентов старших курсов и аспирантов.

Книга ориентирована на тех, кто хочет научиться применять метод конечных элементов, т. е. получать численные решения конкретных задач. Поэтому она представляет интерес для инженеров, физиков, а также математиков, изучающих основные положения метода. Предварительных знаний о методе конечных элементов не требуется.

В монографии отражены работы многих исследователей, и я не утверждаю, что в большей части она оригинальна. Однако порядок расположения материала существенно отличается от других книг и является результатом моего опыта преподавания инженерам, которые применяют метод при решении задач, выходящих за рамки традиционных областей механики сплошных сред. Большинству этих инженеров приходится решать технические задачи. Поэтому в книге рассматриваются прикладные аспекты метода. Математические основы метода конечных элементов безусловно важны, но я считаю, что они должны изучаться после того, как станет понятно, как реализовать метод и какого типа результаты он может дать.

В книгу включено примерно 180 задач. Большинство из них решается вручную, многие связаны с модификацией программ, приведенных в гл. 18, практические задачи решаются на ЭВМ.

Программы, представленные в гл. 18, имеют одну особенность. Они написаны специально в учебных целях и используются при рассмотрении конкретных областей применения. Их главное преимущество заключается в ограниченном числе требуемых исходных данных. Это сокращает время, необходимое для того, чтобы объяснить, как ими пользоваться. Входными параметрами для этих программ являются данные элементов, согласованные с результатами, которые получаются при работе программы, осуществляющей разбиение области. Последняя программа также дана в гл. 18.

Я обязан многим, и в частности д-ру Стауту за его поддержку в процессе подготовки курса, который положен в основу этой книги. Я также признателен моим студентам за их ценные замечания. Особенно хочется выразить благодарность Дж. Роберту Куку, Джорджу Мейсу, Роберту Гастафсону, С. М. Шерифу и Джосу де Бердемекеру за их замечания и полезные советы, а последнему и за предложение названия книги. Наконец, я благодарен г-же Джулии Хофман и г-же Барбаре Сайкс за их труд по перепечатке рукописи.

Ист Лансинг  
Мичиган, 1976

*Ларри Дж. Сегерлинд*

## Глава 1

### МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов является численным методом решения дифференциальных уравнений, встречающихся в физике и технике. Возникновение этого метода связано с решением задач космических исследований (1950 г.). Впервые он был опубликован в работе Тернера, Клуза, Мартина и Топпа [4]. Эта работа способствовала появлению других работ; был опубликован ряд статей с применениями метода конечных элементов к задачам строительной механики и механики сплошных сред. Важный вклад в теоретическую разработку метода сделал в 1963 г. Мелош [2], который показал, что метод конечных элементов можно рассматривать как один из вариантов хорошо известного метода Рэлея—Ритца. В строительной механике метод конечных элементов минимизацией потенциальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений равновесия.

Связь метода конечных элементов с процедурой минимизации привела к широкому использованию его при решении задач в других областях техники. Метод применялся к задачам, описываемым уравнениями Лапласа или Пуассона. Решение этих уравнений также связано с минимизацией некоторого функционала. В первых публикациях [6, 7] с помощью метода конечных элементов решались задачи распространения тепла. Затем метод был применен к задачам гидромеханики, в частности к задаче течения жидкости в пористой среде.

Область применения метода конечных элементов существенно расширилась, когда было показано [3, 8], что уравнения, определяющие элементы в задачах строительной механики, распространения тепла, гидромеханики, могут быть легко получены с помощью таких вариантов метода взвешенных невязок, как метод Галёркина или способ наименьших квадратов. Установление этого факта сыграло важную роль в теоретическом обосновании метода конечных элементов, так как позволило применять его при решении любых дифференциальных уравнений. Следует отметить, что более общие теоретические обоснования исключают необходимость вариационной формулировки физических задач.

Метод конечных элементов из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод числен-

ного решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. Этот прогресс был достигнут за пятнадцатилетний период за счет совершенствования быстродействующих цифровых вычислительных машин, необходимых для более точного расчета конструкций летательных аппаратов, а также благодаря помощи Национального комитета по исследованию космического пространства. Вычислительная машина позволила ускорить проведение многих сложных численных расчетов. Изучение космического пространства потребовало выделения средств на проведение фундаментальных исследований и стимулировало совершенствование универсальных вычислительных программ. Метод конечных элементов применяется при проектировании самолетов, ракет, различных пространственных оболочек и т. п.

## 1.1. Основная концепция метода конечных элементов

*Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину, такую, как температура, давление и перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций<sup>1)</sup>, определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области.*

В общем случае непрерывная величина заранее неизвестна и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель, однако, очень легко построить, если сначала предположить, что числовые значения этой величины в каждой внутренней точке области известны. После этого можно перейти к общему случаю. Итак, при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или просто узлами.

2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

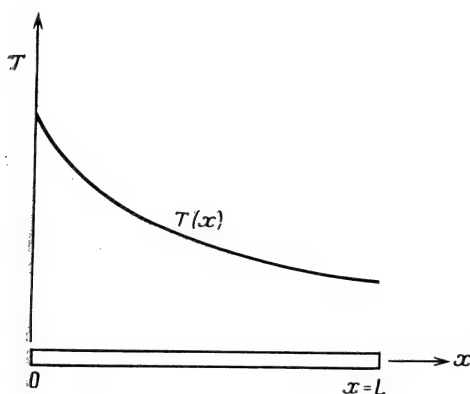
3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

---

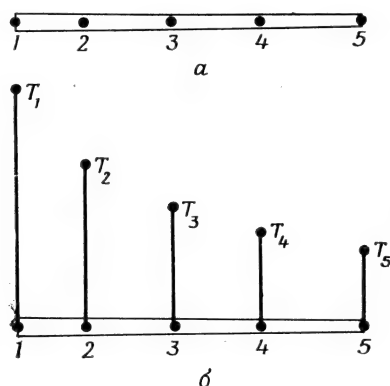
<sup>1)</sup> В этой книге рассматриваются только функции в виде линейных, квадратичных и кубических полиномов. Слова «полином» и «функция» в дальнейшем будут считаться эквивалентными по смыслу.

4. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента<sup>1)</sup>.

Основная концепция метода конечных элементов может быть наглядно проиллюстрирована на одномерном примере заданного распределения температуры в стержне, показанном на фиг. 1.1. Рассматривается непрерывная величина  $T(x)$ , область определения — отрезок  $OL$  вдоль оси  $x$ . Фиксированы и пронумерованы пять точек на оси  $x$  (фиг. 1.2, а). Это узловые точки; совсем не



Фиг. 1.1. Распределение температуры в одномерном стержне.



Фиг. 1.2. Узловые точки и предполагаемые значения  $T(x)$ .

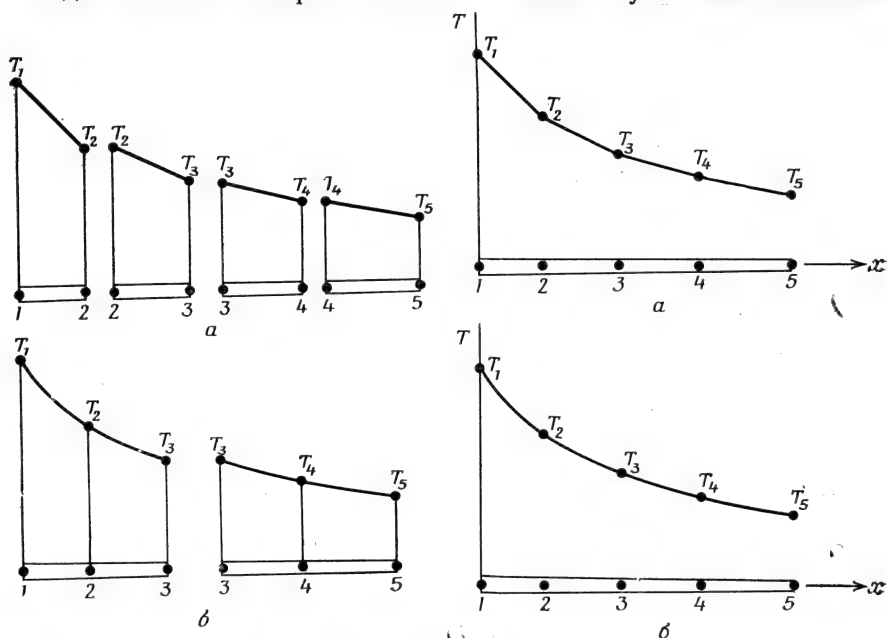
обязательно располагать их на равном расстоянии друг от друга. Очевидно, можно ввести в рассмотрение и более пяти точек, но этих пяти вполне достаточно, чтобы проиллюстрировать основную идею метода. Значения  $T(x)$  в данном случае известны в каждой узловой точке. Эти фиксированные значения представлены графически на фиг. 1.2, б и обозначены в соответствии с номерами узловых точек через  $T_1, T_2, \dots, T_5$ .

Разбиение области на элементы может быть проведено двумя различными способами. Можно, например, ограничить каждый элемент двумя соседними узловыми точками, образовав четыре элемента (фиг. 1.3, а), или разбить область на два элемента, каждый из которых содержит три узла (фиг. 1.3, б). Соответствующий элементу полином определяется по значениям  $T(x)$  в узловых точ-

<sup>1)</sup> Этот полином, связанный с каждым элементом, автор далее называет функцией элемента. — *Прим. ред.*

ках элемента. В случае разбиения области на четыре элемента, когда на каждый элемент приходится по два узла, функция элемента будет линейна по  $x$  (две точки однозначно определяют прямую линию). Окончательная аппроксимация  $T(x)$  будет состоять из четырех кусочно-линейных функций, каждая из которых определена на отдельном элементе (фиг. 1.4, а).

Другой способ разбиения области на два элемента с тремя узловыми точками приводит к представлению функции элемента в виде полинома второй степени. В этом случае окончательной



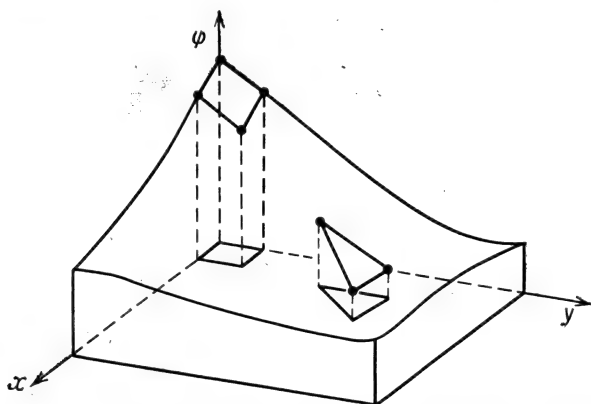
Фиг. 1.3. Деление области на элементы.

Фиг. 1.4. Дискретные модели для одномерного температурного поля.

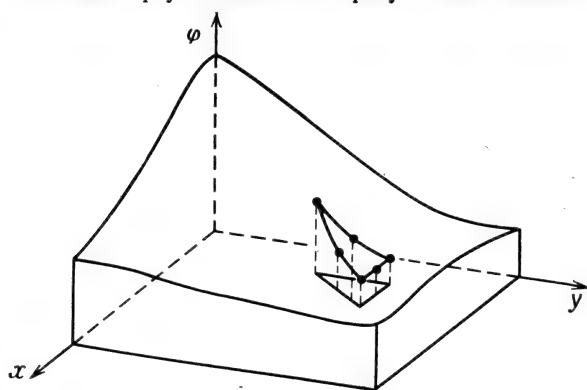
аппроксимацией  $T(x)$  будет совокупность двух кусочно-непрерывных квадратичных функций. Отметим, что это приближение будет именно кусочно-непрерывным, так как углы наклона графиков обеих этих функций могут иметь разные значения в третьем узле.

В общем случае распределение температуры неизвестно и мы хотим определить значения этой величины в некоторых точках. Методика построения дискретной модели остается точно такой же, как описано выше, но с добавлением одного дополнительного шага. Снова определяются множество узлов и значения температуры в этих узлах  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , которые теперь являются переменными, так как они заранее неизвестны. Область разбивается на элемен-

ты, на каждом из которых определяется соответствующая функция элемента. Узловые значения  $T(x)$  должны быть теперь «отрегулированы» таким образом, чтобы обеспечивалось «наилучшее» при-



Фиг. 1.5. Моделирование двумерной скалярной функции с помощью треугольных и четырехугольных элементов.



Фиг. 1.6. Моделирование двумерной скалярной функции с помощью квадратичного треугольного элемента.

ближение к истинному распределению температуры. Это «регулирование» осуществляется путем минимизации некоторой величины, связанной с физической сущностью задачи. Если рассматривается задача распространения тепла, то минимизируется функционал, связанный с соответствующим дифференциальным уравнением. Процесс минимизации сводится к решению систем линей-

ных алгебраических уравнений относительно узловых значений  $T(x)$ .

При построении дискретной модели непрерывной величины, определенной в двух- или трехмерной области, основная концепция метода конечных элементов используется аналогично. В двумерном случае элементы описываются функциями от  $x$ ,  $y$ , при этом чаще всего рассматриваются элементы в форме треугольника или четырехугольника. Функции элементов изображаются теперь плоскими (фиг. 1.5) или криволинейными (фиг. 1.6) поверхностями. Функция элемента будет представляться плоскостью, если для данного элемента взято минимальное число узловых точек, которое для треугольного элемента равняется трем, а для четырехугольного — четырем.

Если используемое число узлов больше минимального, то функции элемента будет соответствовать криволинейная поверхность. Кроме того, избыточное число узлов позволяет рассматривать элементы с криволинейными границами. Окончательной аппроксимацией двумерной непрерывной величины  $\phi(x, y)$  будет служить совокупность кусочно-непрерывных поверхностей, каждая из которых определяется на отдельном элементе с помощью значений  $\phi(x, y)$  в соответствующих узловых точках.

Важным аспектом метода конечных элементов является возможность выделить из набора элементов типичный элемент при определении функции элемента. Это позволяет определять функцию элемента независимо от относительного положения элемента в общей связанной модели и от других функций элементов. Задание функции элемента через произвольное множество узловых значений и координат позволяет использовать функции элемента для аппроксимации геометрии области.

## 1.2. Преимущества и недостатки

В настоящее время область применения метода конечных элементов очень обширна и охватывает все физические задачи, которые могут быть описаны дифференциальными уравнениями. Наиболее важными преимуществами метода конечных элементов, благодаря которым он широко используется, являются следующие:

1. Свойства материалов смежных элементов не должны быть обязательно одинаковыми. Это позволяет применять метод к телам, составленным из нескольких материалов.

2. Криволинейная область может быть аппроксимирована с помощью прямолинейных элементов или описана точно с помощью криволинейных элементов. Таким образом, методом можно пользоваться не только для областей с «хорошей» формой границы.

3. Размеры элементов могут быть переменными. Это позволяет укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость.

4. С помощью метода конечных элементов не представляет труда рассмотрение граничных условий с разрывной поверхностной нагрузкой, а также смешанных граничных условий.

5. Указанные выше преимущества метода конечных элементов могут быть использованы при составлении достаточно общей программы для решения частных задач определенного класса. Например, с помощью программы для осесимметрической задачи о распространении тепла можно решать любую частную задачу этого типа. Факторами, препятствующими расширению круга задач, решаемых методом конечных элементов, являются ограниченность машинной памяти и высокая стоимость вычислительных работ.

Главный недостаток метода конечных элементов заключается в необходимости составления вычислительных программ и применения вычислительной техники. Вычисления, которые требуется проводить при использовании метода конечных элементов, слишком громоздки для ручного счета даже в случае решения очень простых задач. Для решения сложных задач необходимо использовать быстродействующую ЭВМ, обладающую большой памятью.

В настоящее время имеются технологические возможности для создания достаточно мощных ЭВМ. Некоторые коммерческие и управляющие организации располагают обширными комплектами вычислительных программ. Смягчить основной недостаток метода конечных элементов могут совершенствование вычислительных программ и создание мощных ЭВМ.

### 1.3. Структура книги

Целью этой книги является обсуждение тех аспектов метода конечных элементов, которые связаны с решением задач механики сплошных сред, в частности задач переноса тепла, гидромеханики, двумерных и трехмерных задач теории упругости. Наряду с основами теории рассматривается реализация метода на ЭВМ, так как конечной целью является получение численного решения физических задач.

В следующих шести главах рассматриваются основные аспекты метода конечных элементов:

1. Дискретизация области; определение узловых точек и элементов.
2. Определение функций элемента для отдельного элемента.
3. Получение из функций элементов кусочно-непрерывной функции, определенной на всей области.
4. Составление системы уравнений путем минимизации функционала, связанного с физической задачей.
5. Решение указанной системы уравнений относительно узловых значений.
6. Вычисление искомых величин в элементе.

Главы 8—12 посвящены приложениям в различных конкретных областях механики сплошных сред: к задачам распространения тепла и гидродинамики, осесимметрическим задачам теории поля, нестационарным задачам теории поля и задачам теории упругости. Для иллюстрации основ теории в гл. 6 приводится задача о кручении цилиндра некругового сечения. В гл. 13—16 рассматриваются элементы высокого порядка. В гл. 17 обсуждается метод Галёркина. Гл. 18 содержит некоторые вычислительные программы, которые могут быть использованы для решения задач, рассмотренных в книге. Эта глава должна использоваться совместно с гл. 2 и гл. 6—12. Вычислительные программы в гл. 18 составлены специально для учебных целей. Они не относятся к общим программам, с помощью которых решаются сложные задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lynn P. P., Arya S. K., Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 6, 75—83 (1973).
2. Melosh R. J., Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, *J. Am. Inst. for Aeronautics and Astronautics*, 1, 1631—1637 (1965).
3. Szabo B. A., Lee G. C., Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, *Intern. J. of Numerical Methods in Engineering*, 1, 301—310 (1969).
4. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aeronaut. Sci.*, 23, 805—824 (1956).
5. Visser W., A Finite Element Method for the Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1965.
6. Wilson E. L., Nickell R. E., Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, *Nuclear Engineering and Design*, 4, 276—286 (1966).
7. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Finite Elements in the Solution of Field Problems, *The Engineer*, 507—510 (1965).
8. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 2

### ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ

Разбиение области на подобласти представляет собой первый шаг на пути к решению задачи, и именно этот шаг не имеет теоретического обоснования. Искусство разбиения области зависит от имеющихся инженерных навыков. Плохое или несовершенное разбиение будет приводить к ошибочным результатам, если даже остальные этапы метода осуществляются с достаточной точностью.

Дискретизация области (тела) включает задание числа, размеров и формы подобластей, которые используются для построения дискретной модели реального тела. Как инженеры мы сталкиваемся при этом с довольно деликатной ситуацией. С одной стороны, элементы должны быть выбраны достаточно малыми, чтобы получались приемлемые результаты, а с другой стороны, применение достаточно крупных элементов сокращает вычислительную работу. Нужно иметь некоторые общие соображения об окончательных значениях, с тем чтобы можно было уменьшить размеры элементов в тех областях, где ожидаемый результат может очень сильно меняться (большие величины градиентов), и увеличить их там, где ожидаемый результат почти постоянен.

Навыки в дискретизации области приходят с опытом. Однако некоторые общие правила можно сформулировать. Эти правила и некоторые советы относительно дискретизации и обсуждаются в этой главе.

#### 2.1. Типы конечных элементов

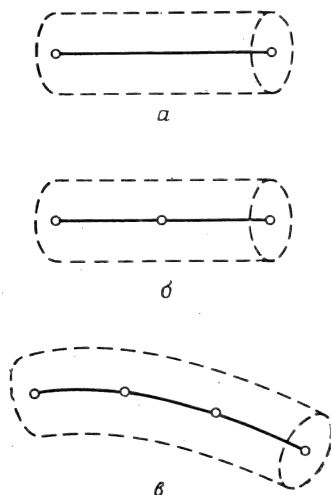
При решении задач методом конечных элементов используются элементы различных типов. Некоторые, наиболее общие из них, обсуждаются в этом разделе.

##### 2.1.1. Одномерные элементы

Простейшим среди элементов является одномерный элемент. Схематически он обычно изображается в виде отрезка (фиг. 2.1, а), хотя и имеет поперечное сечение. Площадь поперечного сечения может изменяться по длине, но во многих встречающихся задачах она считается постоянной. Наиболее часто такой элемент исполь-

зается в одномерных задачах распространения тепла и в задачах строительной механики при расчете стержневых элементов конструкций (типа ферм).

Простейший одномерный элемент имеет два узла, по одному на каждом конце. Элементы более высокого порядка, трехузловые



Фиг. 2.1. Некоторые одномерные конечные элементы.

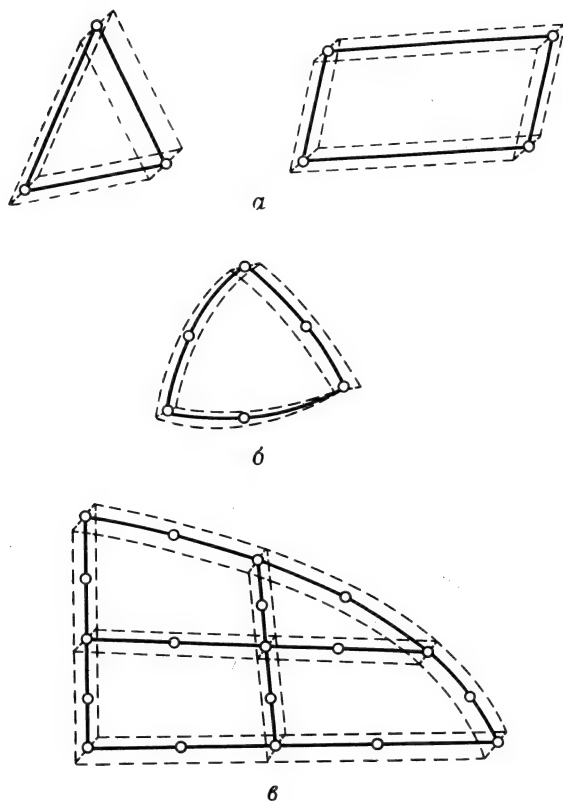
(квадратичные) и четырехузловые (кубические), изображены на фиг. 2.1, б и в. Одномерный элемент может быть криволинейным (фиг. 2.1, в) при условии, что длина дуги входит в уравнения, определяющие элементы.

### 2.1.2. Двумерные элементы

Для построения дискретной модели двумерной области используются два основных семейства элементов: треугольники и четырехугольники. Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии (фиг. 2.2, а). Квадратичные и кубические элементы могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные стороны или те и другие (фиг. 2.2, б). Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если только они имеют одинаковое число узлов на стороне (фиг. 2.2, в). Толщина элемента может быть или постоянной, или являться функцией координат.

### 2.1.3. Трехмерные элементы

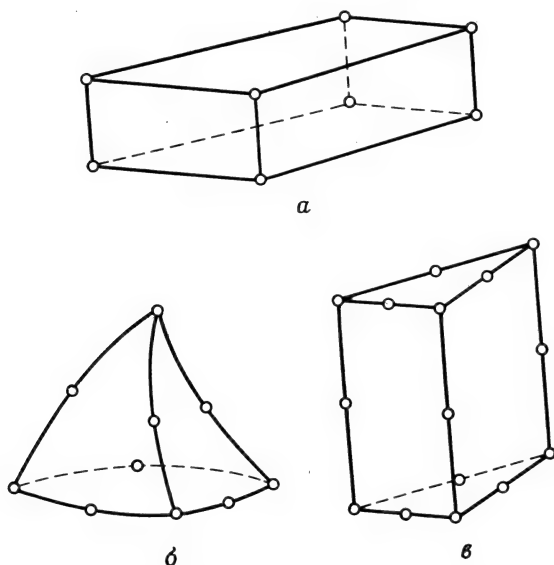
Наиболее часто встречающимися трехмерными элементами являются тетраэдр и параллелепипед (фиг. 2.3, *а* и *б*). В обоих случаях линейные элементы ограничены прямолинейными сторонами (плоскостями), тогда как элементы более высокого порядка могут иметь в качестве границ криволинейные поверхности. При разбиении трехмерного тела трудно наглядно представить расположение



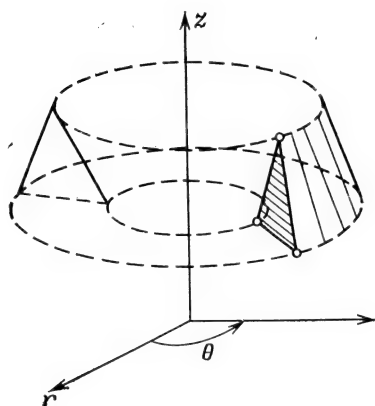
Фиг. 2.2. Некоторые двумерные конечные элементы.

элементов в дискретной модели, поэтому, вероятно, более желательным из этих двух типов элементов является параллелепипед.

На фиг. 2.3, *в* показан другой вид элементов, которые используются при рассмотрении тел цилиндрической формы. Эти элементы подобны двумерному треугольнику и позволяют еще учесть изменение неизвестной величины вдоль третьей координаты.



Фиг. 2.3. Некоторые трехмерные конечные элементы.



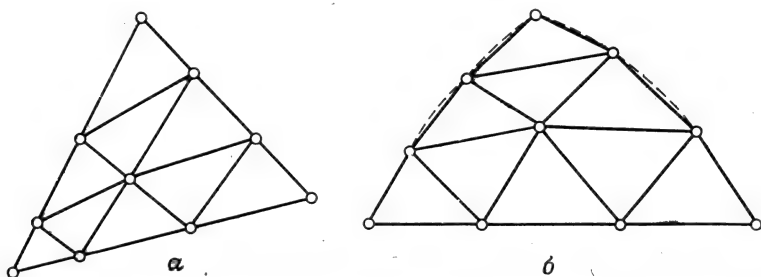
Фиг. 2.4. Осесимметричный конечный элемент.

На фиг. 2.4 показан элемент, широко используемый в осесимметрических задачах. Этот элемент образуется поворотом треугольника на  $360^\circ$ . Подобный элемент может быть получен вращением четырехугольника.

## 2.2. Разбиение области на элементы

Процесс дискретизации может быть разделен на два этапа: разбиение тела на элементы и нумерация элементов и узлов. Последний этап логически совершенно прост, но усложняется в связи с нашим желанием повысить эффективность вычислений.

В этом разделе рассматривается разбиение двумерной области на линейные треугольные элементы. Двумерная область выбрана для удобства иллюстрации; кроме того, идеи, представленные здесь, могут быть обобщены на случай трехмерного тела. Дискре-



Фиг. 2.5. Деление области треугольного вида на линейные треугольные элементы.

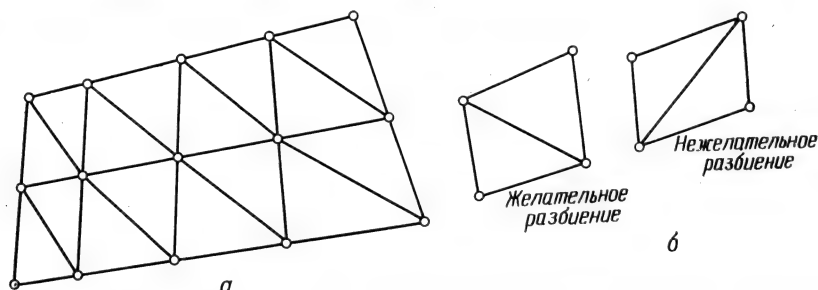
тизация одномерного тела почти тривиальна, так как она сводится только к делению отрезка на более короткие участки.

Разбиение двумерного тела на треугольники выделено потому, что этот элемент — простейший из двумерных элементов в смысле аналитической формулировки. Требование простоты элемента связано с тем, что при моделировании области должно быть использовано большое число элементов, поэтому деление области на треугольники, вероятно, наилучший способ разбиения.

При разбиении любой двумерной области на элементы сначала тело делится на четырехугольные и треугольные подобласти, или зоны, которые затем подразделяются на треугольники. Границы между подобластями должны проходить там, где изменяются геометрия, приложенная нагрузка или свойства материала.

Наиболее просто можно разбить треугольную подобласть на элементы, если выбрать определенное число узлов вдоль каждой стороны, соединить соответствующие узлы прямыми линиями и точки пересечения этих линий считать узлами. Треугольная зона, показанная на фиг. 2.5, *a*, разбита на девять элементов после размещения четырех узлов на каждой стороне. Узлы на сторонах зоны не обязательно располагать на равных расстояниях. Варьирование расстояния между ними позволяет изменять размеры элементов.

Если треугольная подобласть криволинейная, криволинейные границы элементов заменяются на прямые отрезки. Разбиение криволинейной треугольной зоны на линейные треугольники показано на фиг. 2.5, 6. Штриховой линией представлена исходная форма, сплошными линиями изображены элементы.



Фиг. 2.6. Деление области в виде четырехугольника на линейные треугольные элементы.

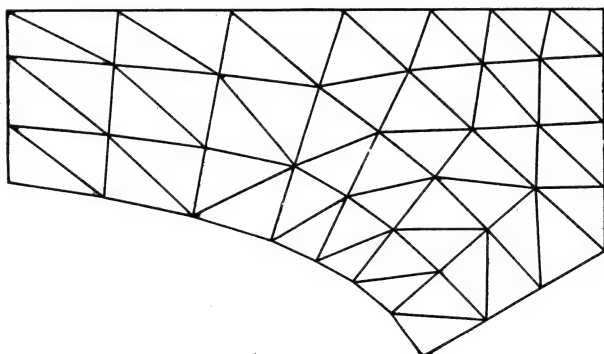
Если на стороне треугольной подобласти выбрано  $n$  узлов, число треугольных элементов в результате разбиения равняется  $(n-1)^2$ .

Четырехугольные зоны обычно разбивают на элементы соединением узлов на противоположных сторонах (фиг. 2.6, а). Пересечения линий определяют внутренние узловые точки. Внутренние четырехугольники могут рассматриваться как элементы; они могут быть разбиты на треугольные элементы проведением короткой диагонали в каждом внутреннем четырехугольнике (фиг. 2.6, б). Разбиение с использованием короткой диагонали предпочтительно, потому что элементы, близкие по форме к равностороннему треугольнику, приводят к более точным результатам, чем длинные узкие треугольники.

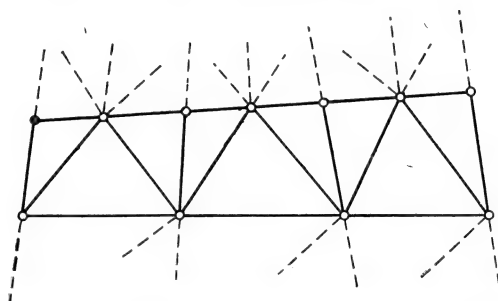
Число узлов на смежных сторонах четырехугольника может быть различным, но на противоположных сторонах узлов должно быть поровну, если только сеть разбиения не измельчается (или укрупняется). Расстояние между граничными узлами можно варьировать, чтобы получать элементы различных размеров. В четырехугольнике будет  $2(n-1)(m-1)$  элементов, если на смежных сторонах его фиксировано  $n$  и  $m$  узлов.

Треугольная и четырехугольная подобласти могут иметь общую границу. Число узлов на этой границе для обеих подобластей должно быть одинаковым и относительное положение узлов должно совпадать. Это требование необходимо для сохранения непрерывности рассматриваемых величин вдоль общей границы элементов.

Применение изложенных идей дискретизации проиллюстрировано на фиг. 2.7. Расстояния между узлами вдоль границ четырехугольной зоны изменяются так, чтобы элементы вблизи криволинейной части границы были малы.



Фиг. 2.7. Деление тела на треугольные и четырехугольные зоны с последующим разбиением на треугольные элементы.

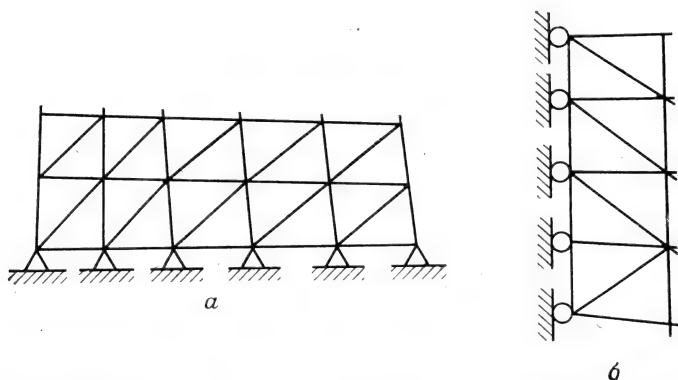


Фиг. 2.8. Разбиение расширяющейся области на линейные треугольные элементы.

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковую форму и размеры, обычно не проводится, потому что существуют концентрации напряжений, температурные градиенты и т. п. Возможность варьировать размеры элемента — важное достоинство метода конечных элементов. Наиболее простой способ существенного изменения размеров элементов заключается в применении четырехугольных подобластей с неравным числом узлов на противоположных сторонах. Хорошим вариантом является случай расположения двух узлов на одной стороне против каждых трех узлов на противоположной стороне. Такая подобласть показана на фиг. 2.8.

В задачах механики твердого деформируемого тела необходимо отметить узлы, которые имеют определенные перемещения.

Для обозначения неподвижных узлов применяется символ неподвижного шарнира (фиг. 2.9, а). Если узел может перемещаться только в одном направлении, используется символ подвижного шарнира (фиг. 2.9, б). Подвижные шарниры, изображенные на



Фиг. 2.9. Неподвижные узлы и узлы, которые могут перемещаться в одном направлении.

фиг. 2.9, б, допускают перемещения в вертикальном направлении и не позволяют двигаться ни в одном из горизонтальных направлений. Учет узловых условий такого типа осуществляется путем видоизменения системы уравнений, решение которой определяет узловые перемещения.

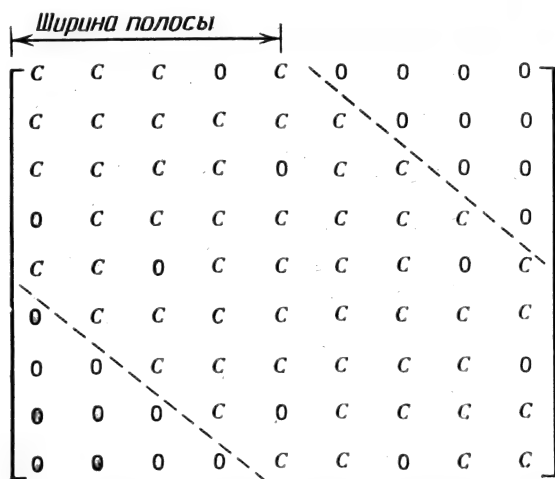
Многие физические задачи не имеют четко установленных границ области анализа. В задаче 5 рассмотрен один из таких примеров — процесс распространения тепла. Земля простирается бесконечно далеко вниз от тротуара, а излучающие тепло кабели простираются направо и налево на неопределенное расстояние.

Моделирование тел, бесконечно протяженных в одном или нескольких направлениях, представляет определенную трудность для инженера, так как он должен иметь дело с ограниченной моделью. Для анализа следует выбирать при этом достаточно большую область, чтобы вычисляемые вдоль ее границ величины были согласованы с теми значениями, которые встречаются в физической задаче. В задаче 5, например, необходимо выбрать достаточно большую по глубине область с тем, чтобы значения в узлах, расположенных на значительном расстоянии от кабелей, были равны между собой.

Вероятно, лучшим руководящим принципом в данном случае являются опыт и изучение чужого опыта в моделировании подобных неограниченных областей.

### 2.3. Нумерация узлов

Нумерация узлов была бы тривиальной операцией, если бы номера узлов не влияли на эффективность вычислений, необходимых для получения решения. Использование метода конечных элементов приводит к системе линейных алгебраических уравнений, большое число коэффициентов которой равно нулю. Рассмотрение матрицы коэффициентов системы показывает, что все ненулевые коэффициенты и некоторые нулевые находятся между двумя линиями, параллельными главной диагонали (фиг. 2.10). Расстояние



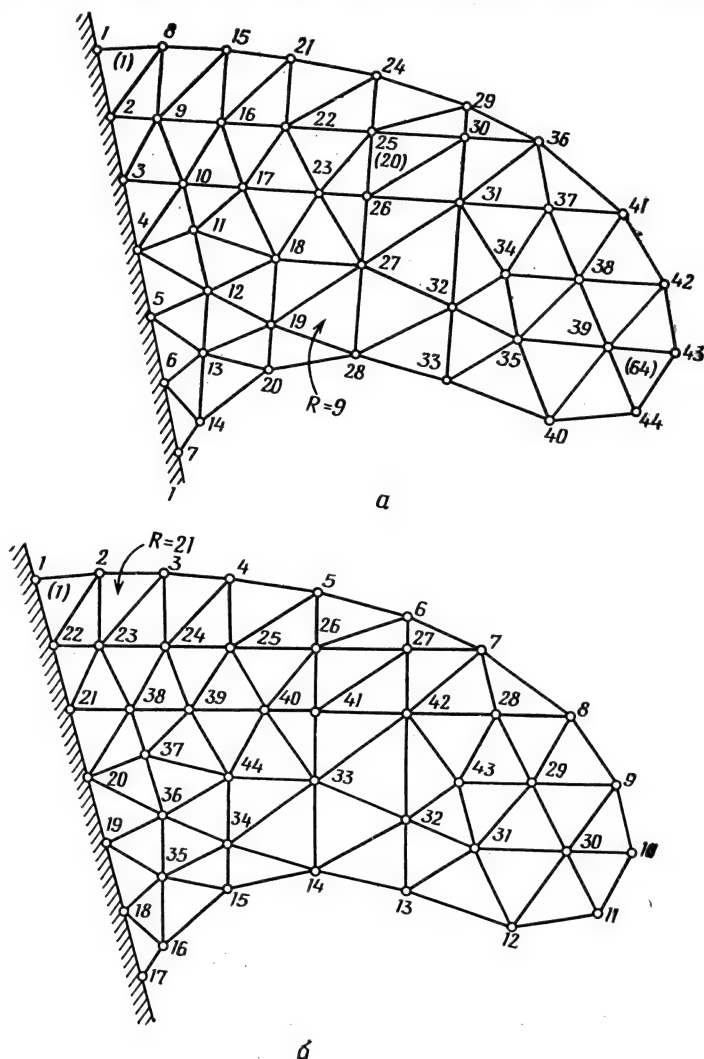
Фиг. 2.10. Ширина полосы матрицы системы уравнений. (С обозначает ненулевые коэффициенты.)

между главной диагональю и этими линиями называется шириной полосы матрицы. Все коэффициенты вне этой полосы равны нулю, и они не должны сохраняться в машинной памяти. Правильная вычислительная программа использует только те коэффициенты матрицы, которые находятся внутри указанной полосы. Уменьшение ширины полосы приводит к сокращению размеров требуемой машинной памяти, а также к сокращению времени вычислений. Ширина полосы  $B$  вычисляется по формуле

$$B = (R + 1)Q, \quad (2.1)$$

где  $R$  — максимальная по элементам величина наибольшей разности между номерами узлов в отдельном элементе,  $Q$  — число неизвестных (число степеней свободы) в каждом узле. Минимизация величины  $B$  связана с минимизацией  $R$ , что, в частности, может быть осуществлено последовательной нумерацией узлов при дви-

жении в направлении наименьшего размера тела. Два разных способа нумерации узлов в теле показаны на фиг. 2.11, а и б. Наибольшие разности между номерами узлов для первых элементов на фиг. 2.11, а и б равны 7 и 21 соответственно. Значения  $R$  для полных наборов элементов равны 9 и 21. Для ширины полосы получают значения 10 и 22, если в каждом узле отыскивается



Фиг. 2.11. Два примера нумерации узлов при разбиении на элементы двумерного тела.

по одной неизвестной величине, или значения 20 и 44, если в каждом узле рассматриваются две неизвестные величины. Правильная нумерация узлов в этом примере сокращает машинную память более чем на 50%.

Нумерация элементов представляет собой простую процедуру. В этой книге номер элемента будет заключаться в круглые скобки с тем, чтобы избежать путаницы с номерами узлов. Элемент (1) на фиг. 2.11, *a* содержит узлы с номерами 1, 2 и 8. Нумерация элементов не влияет на вычислительные аспекты задачи.

## 2.4. Заключение

При решении задач методом конечных элементов используются разнообразные элементы. Некоторые наиболее важные из них введены были в этой главе в связи с рассмотрением дискретизации сплошного тела.

В следующих десяти главах наше внимание будет сосредоточено на симплекс-элементах. Эта группа включает линейный одномерный элемент с двумя узлами, линейный треугольник с тремя узлами и линейный тетраэдр с четырьмя узлами. Упор на эти элементы делается по нескольким причинам. Они просты в теоретическом отношении, что дает возможность легко проиллюстрировать их применение. Треугольный и тетраэдральный элементы могут быть использованы для аппроксимации границ сложной формы, потому что они могут быть ориентированы как угодно. Другой важной причиной является то, что во многих имеющихся вычислительных программах используются эти элементы.

В гл. 18 представлена программа GRID сеточного разбиения, определяющая номера узлов и координаты треугольных симплекс-элементов в произвольной четырехугольной области. Читатель может воспользоваться этой программой для решения задач, помещенных в конце этой главы, и для получения исходных данных элементов в задачах из глав прикладного характера.

## Задачи

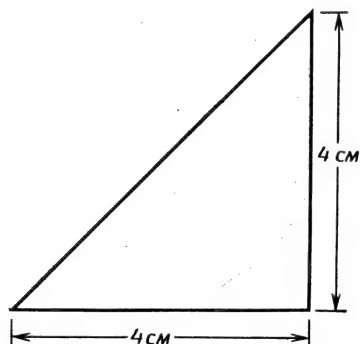
1. Разбейте треугольную область на 16 элементов, пронумеруйте узлы и вычислите определенную выше ширину полосы, предполагая наличие двух степеней свободы в каждом узле.

2. Разбейте четырехугольник на 24 элемента, используя пять узлов вдоль одной пары сторон и четыре узла вдоль другой пары. Пронумеруйте узлы так, чтобы получить минимальное значение величины  $R$ .

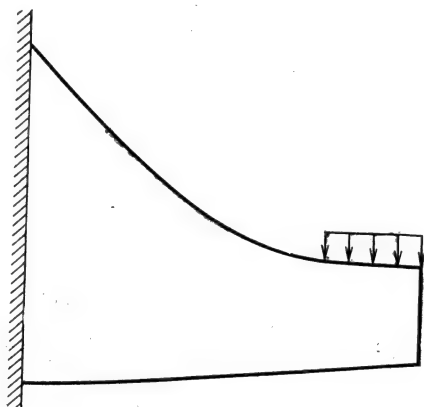
3. Разбейте прямоугольный треугольник примерно на 60 элементов, предварительно выделив две треугольные и одну четы-

рехугольную подобласти. Поместите наименьшие по размерам элементы вблизи прямого угла.

4. Разбейте консоль на линейные треугольные элементы. На закрепленной границе разместите вдвое больше узлов, чем на свободном конце. Укажите с помощью принятых обозначений неподвижно закрепленные узлы.

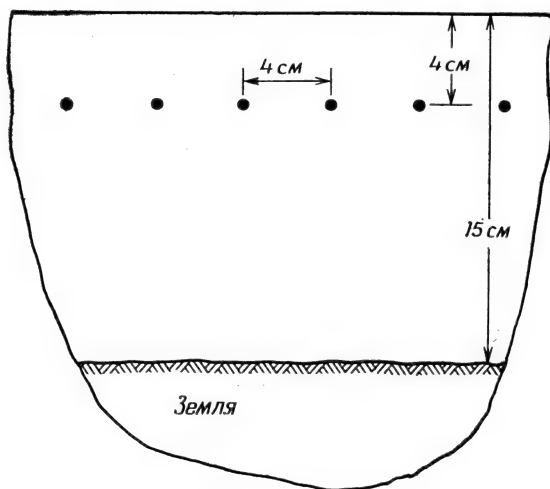


К задаче 3.



К задаче 4.

5. Несколько электрических кабелей проложено внутри тротуара. Кабели могут рассматриваться как источники, размещен-



К задаче 5. (Электрические кабели проложены на глубине 4 см от поверхности. Расстояние между их центрами 4 см.)

ные в узлах. Выберите пригодную для анализа область и разбейте ее на треугольные элементы.

6. Используя программу GRID из гл. 18, определите исходные данные элементов для областей, рассмотренных в задачах 3 и 5.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Desai C. S., Abel J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Co., N. Y., 1970.

## Глава 3

### ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ

Метод конечных элементов основан на идее аппроксимации непрерывной функции (температуры, давления, перемещения и т. д.) дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых элементами. В качестве функции элемента чаще всего применяется полином. Порядок полинома зависит от числа используемых в каждом узле элемента данных о непрерывной функции.

Классификация конечных элементов может быть проведена в соответствии с порядком полиномиальных функций этих элементов. При этом рассматриваются три следующие группы элементов: симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы [4]. Симплекс-элементам соответствуют полиномы, содержащие константу и линейные члены. Число коэффициентов в таком полиноме на единицу больше размерности координатного пространства. Полином

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.1)$$

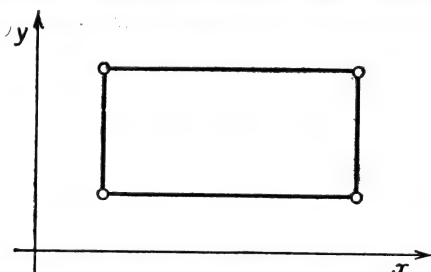
представляет собой симплексную функцию для двумерного треугольного элемента. Этот полином линеен по  $x$  и  $y$  и содержит три коэффициента, потому что треугольник имеет три узла.

Комплекс-элементам соответствуют полиномиальные функции, содержащие константу, линейные члены, а также члены второго, третьего и более высокого порядка, если это необходимо. Форма комплекс-элементов может быть такой же, как и у симплекс-элементов, но комплекс-элементы имеют дополнительные граничные узлы и, кроме того, могут иметь также и внутренние узлы. Главное различие между симплекс- и комплекс-элементами состоит в том, что число узлов в комплекс-элементе больше величины, равной размерности координатного пространства плюс единица. Интерполяционный полином для двумерного треугольного комплекс-элемента имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (3.2)$$

Это соотношение включает шесть коэффициентов, поэтому рассматриваемый элемент должен иметь шесть узлов.

Для мультиплекс-элементов также используются полиномы, содержащие члены высокого порядка, но границы элементов при этом должны быть параллельны координатным осям, что необходимо для достижения непрерывности при переходе от одного эле-



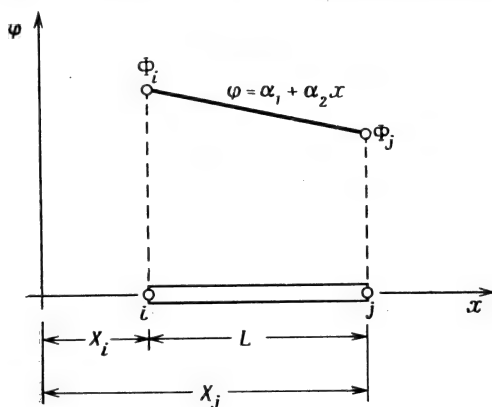
Фиг. 3.1. Прямоугольник, двумерный мультиплекс-элемент.

мента к другому. Границы симплекс- и комплекс-элементов не подвергаются такому ограничению. Прямоугольный элемент на фиг. 3.1 — отличный пример мультиплекс-элемента.

Здесь будут рассмотрены симплекс-элементы. Комплекс- и мультиплекс-элементы наряду с изопараметрическими элементами обсуждаются после прикладных разделов книги.

### 3.1. Одномерный симплекс-элемент

Одномерный симплекс-элемент представляет собой прямолинейный отрезок длины  $L$  с двумя узлами, по одному на каждом конце отрезка (фиг. 3.2). Узлы обозначаются индексами  $i$  и  $j$ , узловые значения — через  $\Phi_i$  и  $\Phi_j$  соответственно. Начало систе-



Фиг. 3.2. Одномерный симплекс-элемент.

мы координат располагается вне элемента. Полиномиальная функция  $\varphi$  для скалярной величины<sup>1)</sup> имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (3.3)$$

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  могут быть определены с помощью условий в узловых точках:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i$$

и

$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_j.$$

Эти узловые условия приводят к системе двух уравнений

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i,$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j,$$

решение которой дает

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} \quad (3.4a)$$

и

$$\alpha_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}. \quad (3.4b)$$

Подставляя найденные значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в формулу (3.3), получаем для  $\varphi$  выражение

$$\varphi = \left( \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} \right) + \left( \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x,$$

которое может быть переписано в виде

$$\varphi = \left( \frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left( \frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j. \quad (3.5)$$

Линейные функции от  $x$  в формуле (3.5) называются функциями формы или интерполяционными функциями. Эти функции всюду обозначаются через  $N$ . Каждая функция формы должна быть снабжена нижним индексом для обозначения узла, к которому она относится. Произвольную функцию формы будем обозначать через  $N_p$ . В соотношение (3.5) входят следующие функции формы:

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad \text{и} \quad N_j = \frac{x - X_i}{L}.$$

---

<sup>1)</sup> Буква  $\varphi$  используется для обозначения произвольной скалярной величины. Буквы  $t$  и  $p$  применяются соответственно для обозначения температуры и давления, когда речь идет о конкретных приложениях.

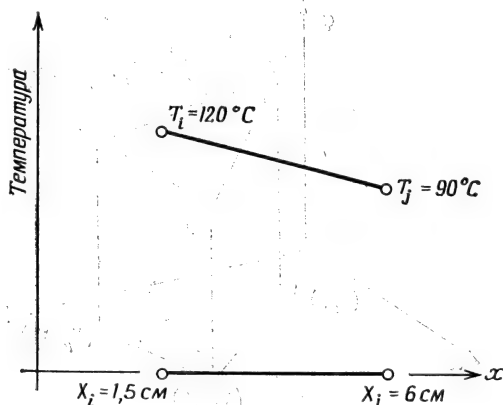
Соотношение (3.5) может быть записано в матричном виде

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \quad (3.6)$$

где  $[N] = [N_i N_j]$  — матричная строка и  $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$  — вектор-столбец. Как видно из формулы (3.5), функция  $N_i = (X_j - x)/L$  равна единице в узле с номером  $i$  и равна нулю в  $j$ -м узле. Аналогично функция  $N_j$  равна нулю в  $i$ -м узле и равна единице в узле с номером  $j$ . Эти значения характерны для функций формы. Они равны единице в одном определенном узле и обращаются в нуль во всех других узлах.

### Пример

7. Одномерный симплекс-элемент используется для аппроксимации распределения температуры в стержне. В результате решения задачи установлено, что температура в узлах  $i$  и  $j$  равна 120 и 90°C соответственно. Требуется определить температуру в точке на расстоянии 4 см от начала координат и градиент температуры внутри элемента. Узлы  $i$  и  $j$  расположены на расстоянии 1, 5 и 6 см от начала координат.



К задаче 7.

Температура  $t$  внутри элемента определяется соотношением

$$t = \left( \frac{X_j - x}{L} \right) T_i + \left( \frac{x - X_i}{L} \right) T_j.$$

Данные элемента:

$$\begin{aligned} X_i &= 1,5 \text{ см}, & T_i &= 120^\circ\text{C}, \\ X_j &= 6,0 \text{ см}, & T_j &= 90^\circ\text{C}, \\ x &= 4,0 \text{ см}, & L &= X_j - X_i = 4,5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Подставляя исходные данные в формулу для температуры, получаем

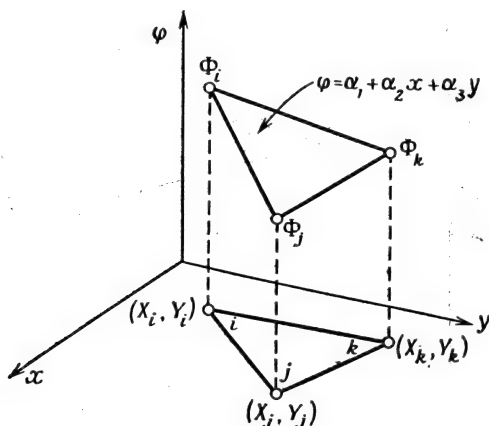
$$\begin{aligned} t &= \left( \frac{6,0 - 4,0}{4,5} \right) 120 + \left( \frac{4 - 1,5}{4,5} \right) 90 = \\ &= \frac{2(120)}{4,5} + \frac{2,5(90)}{4,5} = 53,33 + 50 = 103,33^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Для градиента температуры имеем

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{L} T_i + \frac{1}{L} T_j = \frac{1}{L} (T_j - T_i) = \frac{90 - 120}{4,5} = \frac{-30}{4,5} = \frac{-6,67^\circ\text{C}}{\text{см}}.$$

### 3.2. Двумерный симплекс-элемент

Двумерный симплекс-элемент показан на фиг. 3.3. Это треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами, по одному в каждой вершине. Необходима логическая нумерация узлов эле-



Фиг. 3.3. Двумерный симплекс-элемент.

мента. В этой книге используется последовательная нумерация узлов против часовой стрелки, начиная от некоторого  $i$ -го узла, который выбирается произвольно. Узловые значения скалярной величины  $\varphi$  обозначаются через  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  и  $\Phi_k$ , а координатные пары трех узлов — через  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$ ,  $(X_k, Y_k)$ .

Интерполяционный полином имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (3.7)$$

В узлах выполняются следующие условия:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i, \quad y = Y_i,$$

$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_j, \quad y = Y_j$$

и

$$\varphi = \Phi_k \quad \text{при} \quad x = X_k, \quad y = Y_k.$$

Подстановка этих условий в формулу (3.7) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i, \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j, \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

решая которую получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + \\ &\quad + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k], \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k]. \end{aligned}$$

Определитель системы связан с площадью треугольника  $A$  соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A. \quad (3.9)$$

Подставляя значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в формулу (3.7), можно преобразовать выражение для  $\varphi$  к виду, подобному (3.6). Это соотношение, определяющее элемент, содержит три функции формы, по одной для каждого узла:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (3.10)$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$$

Вычислим значение  $N_i$  в  $i$ -м узле:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) =$$

$$= \frac{1}{2A} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i)$$

Выражение в скобках представляет собой величину определителя в формуле (3.9), поэтому в узле с номером  $i$

$$N_i = \frac{1}{2A} (2A) = 1.$$

Предлагаем читателю показать, что  $N_i$  равно нулю во втором и третьем узлах, так же как и во всех точках прямой, проведенной через эти узлы.

Скалярная величина  $\phi$  определяется внутри элемента функциями формы, линейными по  $x$  и  $y$ . Это означает, что градиенты этой величины в направлениях  $x$  и  $y$  будут постоянны. Градиент в направлении  $x$  определяется соотношением

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k, \quad (3.11)$$

то

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \quad \beta = i, j, k.$$

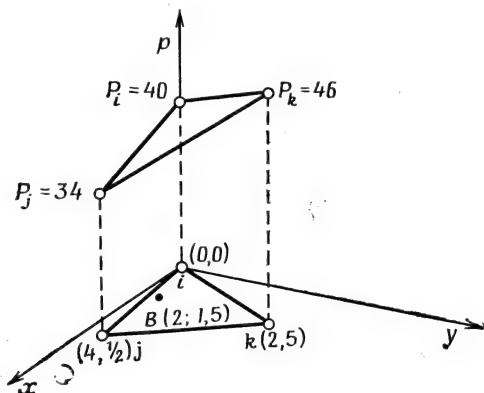
Поэтому

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k. \quad (3.12)$$

Так как  $b_i$ ,  $b_j$ ,  $b_k$  постоянны (они фиксированны как только заданы узловые координаты) и  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  и  $\Phi_k$  не зависят от координат пространства, частная производная в (3.12) имеет постоянное значение. *Постоянство градиента внутри каждого элемента означает, что необходимо использовать очень малые по величине элементы, чтобы аппроксимировать быстро меняющуюся функцию  $\phi$ .*

### Пример

8. Требуется получить соотношение, определяющее элемент, и вычислить значение давления в точке  $B$  с координатами  $(2, 1,5)$ , если заданы узловые значения  $P_i=40$  Н/см<sup>2</sup>,  $P_j=34$  Н/см<sup>2</sup> и  $P_k=46$  Н/см<sup>2</sup>.



К задаче 8.

Давление  $p$  внутри элемента определяется по формуле

$$p = N_i P_i + N_j P_j + N_k P_k,$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y)$$

и

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y).$$

Подстановка значений координат узлов в формулу (3.10) дает

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4(5) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 19,$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k = 2(0) - 0(5) = 0,$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0\left(\frac{1}{2}\right) - 4(0) = 0,$$

$$b_i = Y_j - Y_k = \frac{1}{2} - 5 = -4,5,$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5,$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2,$$

$$c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2,$$

$$c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4,$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19.$$

После подстановки констант в функции формы выражение для  $p$  принимает вид

$$p = \left[ (19 - 4,5x - 2y) P_i + (5x - 2y) P_j + \left( -\frac{1}{2}x + 4y \right) P_k \right] \frac{1}{19}.$$

Значение давления  $p$  в точке  $B$  с координатами  $(2, 1,5)$  равно

$$p = \frac{1}{19} [(7)(40) + 7(34) + 5(46)] = 39,37 \text{ Н/см}^2.$$

Следует отметить два полезных свойства треугольного элемента. Во-первых функция  $\phi$  изменяется линейно между двумя любыми узлами. Так как узлы определяют границы элемента,  $\phi$  меняется линейно вдоль каждой из трех его сторон. Отсюда следует второе полезное свойство: любая линия, вдоль которой  $\phi$  принимает одинаковые значения, есть прямая, пересекающая две стороны элемента. Исключением будет случай, когда во всех узлах значения  $\phi$  одинаковые. Приведенные два свойства позволяют легко определять линии уровня скалярной величины. Обратимся опять к предыдущему примеру, чтобы проиллюстрировать эти свойства.

## Пример

9. Требуется определить линию уровня, соответствующую величине давления  $42 \text{ Н/см}^2$ , для треугольного элемента, использованного в задаче 8.

Искомая линия уровня пересекает стороны  $ik$  и  $kj$ . Поскольку давление меняется линейно вдоль каждой из сторон треугольника, можно составить простые отношения, позволяющие получить координаты точек на указанных сторонах, через которые проходит искомая линия. Для стороны  $jk$  имеем

$$\frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{2 - x}{2 - 4}, \quad \text{или} \quad \frac{4}{12} = \frac{2 - x}{-2}, \quad x = 2,67 \text{ см}$$

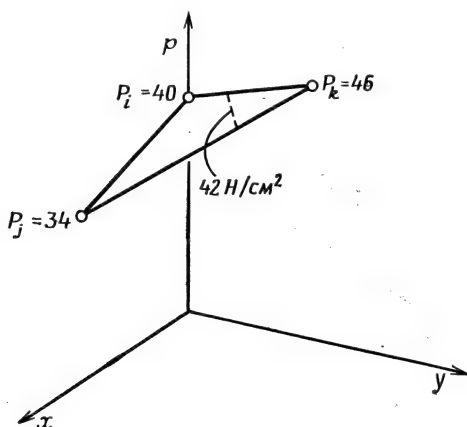
и

$$\frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{5 - y}{5 - 0,5}, \quad \text{или} \quad y = 3,5 \text{ см.}$$

Поступая аналогично, получим координаты точки на стороне  $ik$ :

$$x = \frac{2}{3} \text{ см} \quad \text{и} \quad y = \frac{5}{3} \text{ см.}$$

Линия уровня показана ниже:



К задаче 9.

### 3.3. Трехмерный симплекс-элемент

Трехмерный симплекс-элемент представляет собой тетраэдр. Четыре его узла обозначены индексами  $i, j, k$  и  $l$ , причем обход узлов  $i, j, k$  в том порядке, как они написаны, осуществляется против часовой стрелки. Узел  $l$  расположен в вершине, находящейся вне плоскости узлов  $i, j, k$ . Элемент изображен на фиг. 3.4.

Интерполяционный полином для тетраэдра имеет вид

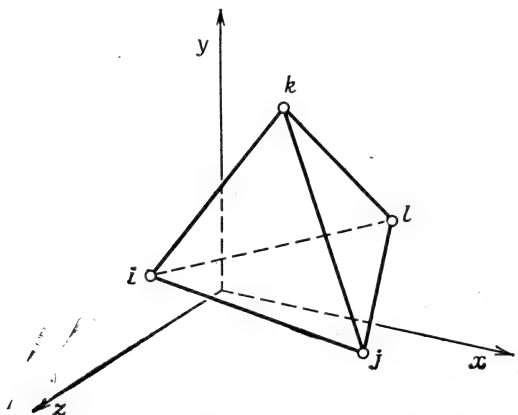
$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (3.13)$$

Коэффициенты можно определить, используя четыре условия в узлах:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i, \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j, \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k, \\ \Phi_l &= \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эта система уравнений может быть решена с помощью правила Крамера. Такая процедура, однако, требует вычисления пяти определителей. Проще всего провести эти вычисления на машине. Систему уравнений (3.14) запишем в матричной форме

$$\{\Phi\} = [C] \{\alpha\}, \quad (3.15)$$



Фиг. 3.4. Трехмерный симплекс-элемент.

где

$$\{\Phi\}^T = [\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l], \quad (3.16)$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Строка коэффициента  $\{\alpha\}$  может быть получена обращением матрицы  $[C]$  и последующим умножением (3.15) на  $[C]^{-1}$ :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (3.18)$$

Так как

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = [1 \ x \ y \ z] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix},$$

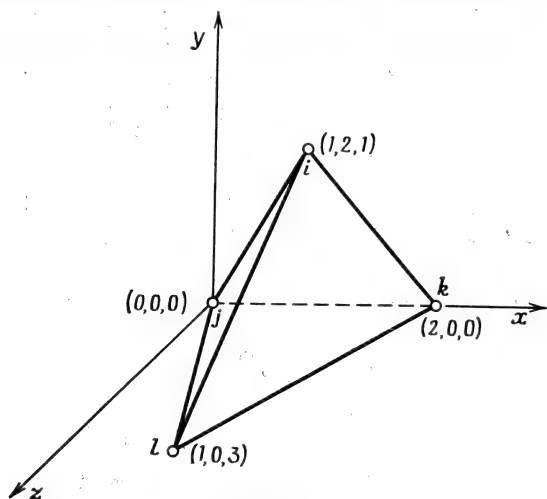
то, используя формулу (3.18), получим

$$\varphi = [1 \ x \ y \ z] [C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (3.19)$$

Определитель матрицы  $[C]$  равен шести объемам тетраэдра. Элементы матричной алгебры, необходимые при использовании правила Крамера, изложены, например, в книге Зенкевича [5].

### Пример

10. Координаты вершин тетраэдра показаны ниже. Требуется определить функции формы, используя процедуру обращения



К задаче 10.

матрицы. По значениям координат узлов составим матрицу

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ -1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ей соответствует обратная матрица

$$[C]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запишем интерполяционный полином

$$\Phi = [1 \ x \ y \ z] [C]^{-1} \{\Phi\}.$$

Так как

$$\Phi = [N] \{\Phi\},$$

функции формы представляются произведением вида

$$[N] = [1 \ x \ y \ z] [C]^{-1}.$$

После подстановки  $[C]^{-1}$  имеем

$$[N] = \frac{1}{6} [1 \ x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

или

$$[N] = \left[ \frac{y}{2}, \frac{1}{6}(6-3x-y-z), \frac{1}{6}(3x-y-z), \frac{1}{6}(-y+2z) \right].$$

Таким образом, функции формы рассматриваемого элемента имеют вид

$$N_i = \frac{y}{2},$$

$$N_j = \frac{6-3x-y-z}{6},$$

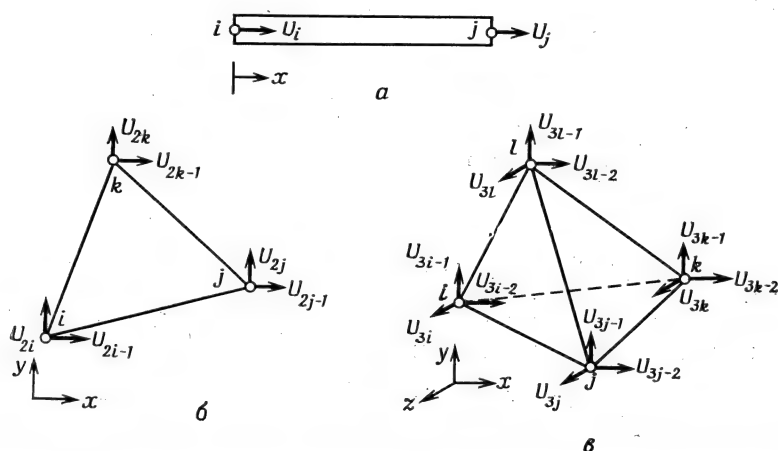
$$N_k = \frac{3x-y-z}{6},$$

$$N_l = \frac{-y+2z}{6}.$$

### 3.4. Интерполирование векторных величин

Интерполяционные соотношения в предыдущих разделах используются при рассмотрении скалярной величины. Векторная величина, например перемещение, имеет как величину, так и направление, поэтому в каждом узле необходимо определять более одной неизвестной (степени свободы). Обычно в этом случае поступают следующим образом: векторная величина представляется ее компонентами, которые рассматриваются как неизвестные скалярные величины. Каждый узел будет содержать одну, две или три неизвестные в зависимости от того, какая задача рассматривается — одномерная, двумерная или трехмерная.

Используемое в этой книге обозначение компонент вектора проиллюстрировано на фиг. 3.5. Все компоненты обозначаются буквой  $U$ . Отдельные компоненты различаются нижним индексом. Числовые значения нижних индексов упорядочиваются в соответствии с направлением компонент вектора по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



Фиг. 3.5. Обозначения узловых векторных величин, используемые в симплекс-элементах.

$a$  — одномерный элемент;  $b$  — двумерный элемент;  $v$  — трехмерный элемент.

Наименьшее значение соответствует компоненте по оси  $x$ . Направление положительной компоненты совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси. Буквы  $u$ ,  $v$  и  $w$  используются для обозначения перемещений по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

В одномерной задаче представления векторной и скалярной величин внутри элемента совпадают, так как в обоих случаях в каждом узле отыскивается только одна неизвестная:

$$u = N_i U_i + N_j U_j = [N_i N_j] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

где  $u$  — перемещение вдоль элемента. Функции формы, приведенные здесь, идентичны записанным в формуле (3.5).

При рассмотрении векторной величины в треугольном симплекс-элементе следует использовать результаты разд. 3.3. Горизонтальное перемещение  $u$  аппроксимируется выражением

$$u = N_i U_{2i-1} + N_j U_{2j-1} + N_k U_{2k-1}, \quad (3.21)$$

вертикальная компонента  $v$  представляется формулой

$$v = N_i U_{2i} + N_j U_{2j} + N_k U_{2k}. \quad (3.22)$$

Эти два соотношения могут быть записаны с учетом всех узловых значений вектора перемещения:

$$\begin{aligned} u &= N_i U_{2i-1} + 0U_{2i} + N_j U_{2j-1} + 0U_{2j} + N_k U_{2k-1} + 0U_{2k}, \\ v &= 0U_{2i-1} + N_i U_{2i} + 0U_{2j-1} + N_j U_{2j} + 0U_{2k-1} + N_k U_{2k}. \end{aligned}$$

Воспользуемся матричными обозначениями

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Функции формы в (3.23) идентичны представленным в формуле (3.10).

Распространив эту процедуру на случай трех измерений, получим следующие зависимости:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

### 3.5. Местная система координат

Получение системы уравнений для узловых значений неизвестных величин включает интегрирование по площади элемента функций формы или их частных производных. Интегрирование может быть упрощено, если записать интерполяционные соотношения в системе координат, связанной с элементом. Эту систему координат называют местной (или локальной) системой координат.

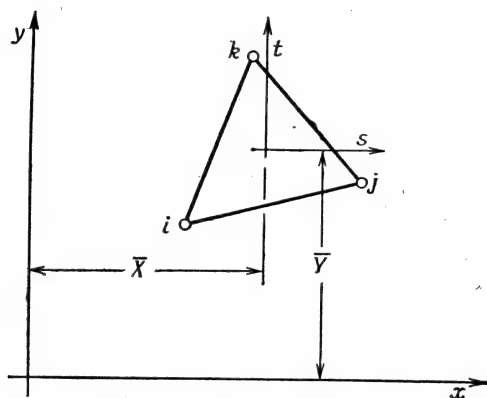
Интерполяционные соотношения могут быть записаны в местной системе координат путем преобразования уравнений, полученных в глобальной системе координат.

Рассмотрим треугольный элемент, в котором скалярная величина представляется в виде

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k,$$

а функции формы определяются формулой (3.10). Поместим местную систему координат в центре элемента, как показано на фиг. 3.6. Запишем формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned}x &= \bar{X} + s, \\ y &= \bar{Y} + t,\end{aligned}\tag{3.25}$$



Фиг. 3.6. Местная система координат для треугольного элемента.

где  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  — координаты центра:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{X_i + X_j + X_k}{3}, \\ \bar{Y} &= \frac{Y_i + Y_j + Y_k}{3}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Функция формы  $N_i$  в глобальной системе координат имеет вид

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y).$$

Подставив сюда вместо  $x$  и  $y$  их выражения через  $s$  и  $t$ , получим

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i (\bar{X} + s) + c_i (\bar{Y} + t)],$$

или

$$N_i = \frac{1}{2A} [(a_i + b_i \bar{X} + c_i \bar{Y}) + b_i s + c_i t].\tag{3.27}$$

В результате преобразования  $b_i$  и  $c_i$  остаются неизменными и по-прежнему умножаются на независимые переменные. Константа  $a_i$  изменяется. Вспоминая определения  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ , данные в формуле (3.10), и учитывая выражения (3.26), можем обнаружить, что  $(a_i + b_i \bar{X} + c_i \bar{Y})$  равно  $2A/3$ . Таким образом, функция формы в системе координат, связанной с элементом, принимает вид

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (Y_j - Y_k)s + (X_k - X_j)t \right]. \quad (3.28)$$

Аналогично получаем выражения для других функций формы:

$$N_j = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (Y_i - Y_k)s + (X_k - X_i)t \right] \quad (3.29)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (Y_i - Y_j)s + (X_j - X_i)t \right].$$

Интеграл от функции, заданной в глобальной системе координат, может быть вычислен в местной системе координат с помощью соотношения [3]

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R^*} f[x(s, t), y(s, t)] |J| ds dt, \quad (3.30)$$

где  $R$  и  $R^*$  — соответственно старая и новая области интегрирования,  $|J|$  — абсолютное значение определителя преобразования системы координат, которое равно отношению площадей в двух системах координат  $A_{xy}/A_{st}$ . Так как обе системы прямоугольные и масштабы измерения в них совпадают, то  $|J| = 1$ . Кроме того,  $R = R^*$ , поскольку форма элемента сохраняется при этом неизменной. Таким образом, соотношение (3.30) сводится к следующему:

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R^*} f[x(s, t), y(s, t)] ds dt. \quad (3.31)$$

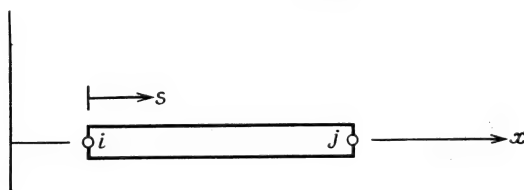
Функция  $f(x, y)$  в левой части равенства (3.31) представляет собой функцию формы элемента, выраженную в глобальной системе координат, тогда как  $f[x(s, t), y(s, t)]$  соответствует функции формы элемента, представленной в локальной системе координат.

### 3.5.1. Одномерный элемент

При рассмотрении одномерного элемента нет большой необходимости в использовании местной системы координат, так как интерполяционное уравнение легко интегрируется в этом случае. До некоторой степени интегрирование можно упростить, поместив на-

чало местной системы координат в  $i$ -м узле элемента (фиг. 3.7). Подставляя выражение

$$x = X_i + s$$



Фиг. 3.7. Местная система координат для одномерного элемента.

в уравнение (3.5), определяющее функции формы, получаем

$$N_i = \frac{X_j - X_i - s}{L} = \frac{L - s}{L} = 1 - \frac{s}{L} \quad (3.32)$$

и

$$N_j = \frac{X_i + s - X_i}{L} = \frac{s}{L}. \quad (3.33)$$

Соотношение, определяющее элемент, записывается теперь в виде

$$\varphi = \left(1 - \frac{s}{L}\right) \Phi_i + \left(\frac{s}{L}\right) \Phi_j. \quad (3.34)$$

### 3.5.2. $L$ -координаты

Для треугольного элемента наиболее распространенной является естественная система координат, определяемая тремя относительными координатами  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , изображенными на фиг. 3.8, *а*. Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон  $s$  к высоте  $h$ , опущенной на эту сторону из противоположной вершины (фиг. 3.8, *б*). Ясно, что величина  $L_1$  изменяется в пределах от нуля до единицы ( $0 \leq L_1 \leq 1$ ). В тех же пределах изменяются  $L_2$  и  $L_3$ . На фиг. 3.8, *в* показаны линии, вдоль которых  $L_1$  постоянна по величине. Каждая из этих линий параллельна стороне, от которой измеряется  $L_1$ .

Координаты  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  называются  $L$ -координатами. Их значения дают относительные величины площадей треугольников, на которые разбит элемент.  $L$ -координаты точки  $B$  (фиг. 3.8, *б*) представляют собой площади треугольников, изображенных на фиг. 3.9. Площадь  $A_i$  треугольника  $(i, j, k)$  дается формулой

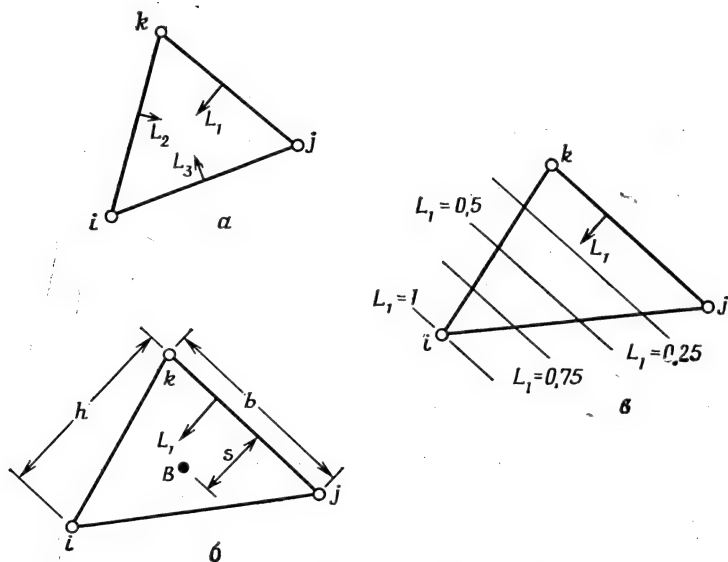
$$A_i = \frac{bh}{2}. \quad (3.35)$$

Площадь  $A_1$  заштрихованного треугольника ( $B, j, k$ ) равна

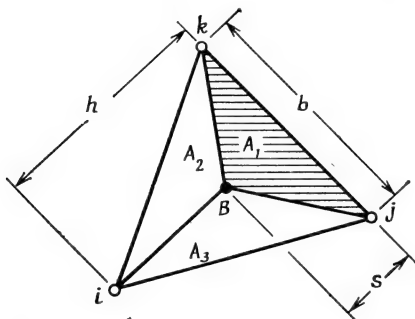
$$A_1 = \frac{bs}{2}. \quad (3.36)$$

Составим отношение этих площадей

$$\frac{A_1}{A_t} = \frac{s}{h} = L_1.$$



Фиг. 3.8.  $L$ -координаты для треугольника.



Фиг. 3.9. Три площади, связанные с произвольной точкой треугольника.

Итак, координата  $L_1$  представляет собой отношение площади заштрихованного треугольника на фиг. 3.9 к площади всего эле-

мента:

$$L_1 = \frac{A_i}{A_t}. \quad (3.37)$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для  $L_2$  и  $L_3$ :

$$L_2 = \frac{A_j}{A_t}, \quad L_3 = \frac{A_k}{A_t}. \quad (3.38)$$

Так как  $A_1 + A_2 + A_3 = A_t$ ,

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (3.39)$$

Уравнение (3.39) связывает между собой три координаты. Уравнения этого типа следовало ожидать, потому что три координаты в двумерном случае не могут быть независимыми. Местоположение произвольной точки может быть полностью описано с помощью только двух координат.

Изучение свойств  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  с учетом соотношения (3.39) обнаруживает некоторые интересные сведения. Координатные переменные  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  представляют собой функции формы для треугольного симплекс-элемента:

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3. \quad (3.40)$$

Как видно из фиг. 3.8, а,

$$L_1 = \begin{cases} 1 & \text{в узле с номером } i, \\ 0 & \text{в узлах } j \text{ и } k. \end{cases}$$

Подобные соотношения выполняются также для  $L_2$  и  $L_3$ . Кроме того, формула (3.39) позволяет утверждать, что в произвольной точке элемента функции формы всегда в сумме равны единице и, таким образом, выполняется критерий сходимости, обсуждаемый далее в этой главе. Наконец, если записать следующие зависимости:

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_i + L_2 X_j + L_3 X_k, \\ y &= L_1 Y_i + L_2 Y_j + L_3 Y_k, \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

и разрешить их относительно  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , то в результате получим соотношения, идентичные (3.10). Первые два уравнения в (3.41) представляют координаты  $x$  и  $y$  как функции узловых значений. Эти уравнения справедливы, поскольку  $x$  и  $y$  представляют собой компоненты расстояния, а мы уже видели, что векторные компоненты могут быть выражены как функции соответствующих узловых значений,

Преимуществом использования  $L$ -координат является существование интегральных формул, которые упрощают вычисление интегралов вдоль сторон элемента и по его площади [1]:

$$\int_{\mathcal{L}} L_1^a L_2^b d\mathcal{L} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \mathcal{L}, \quad (3.42)$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (3.43)$$

Использование соотношения (3.43) может быть проиллюстрировано при вычислении интеграла вида

$$\int_A N_i N_j dA,$$

где  $N_i$  и  $N_j$  — функции  $x$  и  $y$ . Этот интеграл по площади элемента преобразуется следующим образом:

$$\int_A N_i N_j dA = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}.$$

Координаты  $L_1$  и  $L_2$  соответствуют функциям формы  $N_i$ ,  $N_j$ , как показано на фиг. 3.8, а. Поскольку  $N_k$  не вошло в подынтегральное выражение, показатель степени  $c$  у множителя  $L_3$  приравнен нулю.

Соотношение (3.42) используется для вычисления интегралов вдоль стороны элемента. Величина  $\mathcal{L}$  представляет собой расстояние между двумя узлами рассматриваемой стороны.

Удобства применения формул (3.42) и (3.43) станут очевидны, когда мы перейдем к рассмотрению конкретных задач.

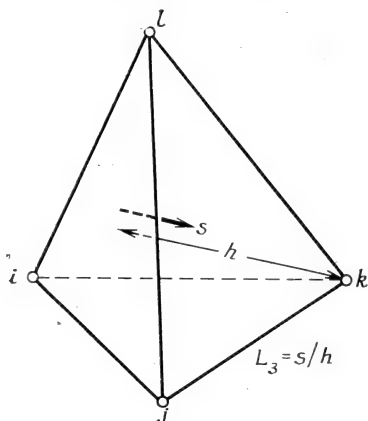
### 3.5.3. Объемные $L$ -координаты

Естественная система координат для тетраэдрального элемента вводится почти полностью аналогично тому, как это было сделано в случае плоских  $L$ -координат. Четыре относительных расстояния  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и  $L_4$  определяются как отношения расстояний от выбранной произвольной точки элемента до одной из его граней к высоте, опущенной на эту грань из противоположащей вершины. Такие  $L$ -координаты называются объемными (фиг. 3.10). Они связаны между собой соотношением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \doteq 1. \quad (3.44)$$

Функции формы для линейного тетраэдра представляют собой объемные  $L$ -координаты:

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3, \quad N_l = L_4. \quad (3.45)$$



Фиг. 3.10. Объемная  $L$ -координата  $L_3$  для элемента в виде тетраэдра.

Использование объемных  $L$ -координат упрощает вычисление объемных интегралов, так как

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V_e \quad (3.46)$$

### 3.6. Свойства интерполяционного полинома

Полиномиальные уравнения (3.3), (3.7) и (3.13) были использованы для аппроксимации скалярных и векторных величин внутри элемента потому, что они обладают некоторыми весьма желательными свойствами. Они дают правильные результаты, когда узловые значения рассматриваемых величин равны между собой, и, кроме того, обеспечивают непрерывность в межэлементных зонах.

#### 3.6.1. Сходимость

Решение, полученное методом конечных элементов, будет сходиться к точному решению с уменьшением размеров элемента при условии, что, как только узловые значения оказываются равными между собой, интерполяционные уравнения приводят к по-

стоянным значениям рассматриваемых величин внутри элемента. При этом подразумевается, что градиенты бесконечно малы.

Интерполяционные уравнения для элемента должны моделировать постоянные значения, если только такие значения встречаются. Эти критерии накладывают ограничения на функции формы. Предположим, что узловые значения элемента, который имеет  $r$  узлов, равны  $\Phi_i = \Phi_j = \Phi_k = \dots = \Phi_r = C$ , где  $C$  — постоянная скалярная величина. В общем виде выражение для  $\varphi$  записывается в виде

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + \dots + N_r \Phi_r,$$

откуда

$$\varphi = (N_i + N_j + N_k + \dots + N_r) \Phi_i.$$

Однако, поскольку  $\varphi = C = \Phi_i$ ,

$$\sum_{\beta=i}^r N_{\beta} = 1. \quad (3.47)$$

Итак, сумма значений функций формы должна равняться единице в каждой внутренней точке элемента. Если этот критерий не выполняется, то полиномиальная аппроксимация  $\varphi$  не будет давать постоянных значений даже тогда, когда по условию они должны быть.

Запишем функции формы для одномерного элемента:

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad \text{и} \quad N_j = \frac{x - X_i}{L}.$$

Складывая их, получаем

$$N_i + N_j = \frac{X_j - x}{L} + \frac{x - X_i}{L} = \frac{X_j - X_i}{L} = \frac{L}{L} = 1.$$

Эти функции формы в сумме дают единицу. Анализируя двумерные и трехмерные симплекс-элементы, можно показать, что функции формы для этих элементов тоже удовлетворяют условию (3.47).

Наличие постоянных значений  $\varphi$  (или перемещений и т. д.) внутри элемента подразумевает отсутствие градиента  $\varphi$  по любому направлению. Рассмотрим градиент в направлении оси  $x$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \dots + \frac{\partial N_r}{\partial x} \Phi_r.$$

Если  $\Phi_{\beta}$  равна константе  $C$ , то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left[ \sum_{\beta=i}^r \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \right] C = 0. \quad (3.48)$$

Так как константа  $C$  не обязательно равна нулю, равенство (3.48) удовлетворяется, если только

$$\sum_{\beta=i}^r \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} = 0. \quad (3.49)$$

Преобразуя выражение (3.49), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=i}^r \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial N_r}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (N_i + N_j + \dots + N_r) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{\beta=i}^r N_{\beta} \right]. \end{aligned}$$

Однако, так как сумма  $\sum_{\beta=i}^r N_{\beta} = 1$ , частная производная по  $x$  от этой суммы равна нулю. Таким образом, критерий относительно градиента удовлетворяется автоматически, если только удовлетворяется критерий (3.47).

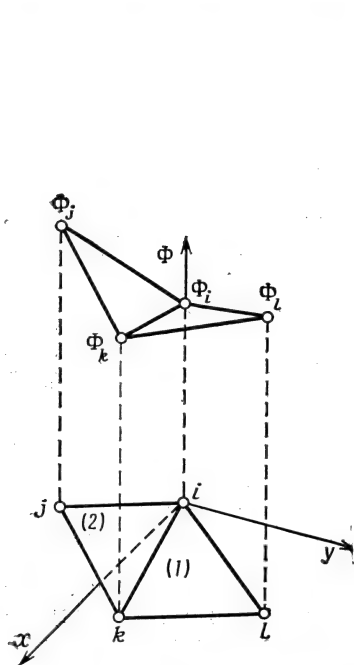
### 3.6.2. Непрерывность

Дискретная модель для непрерывной функции строится на множестве кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена на отдельном элементе. Для интегрирования в дальнейшем кусочно-непрерывной функции необходимо сформулировать условие ее непрерывности в межэлементной зоне. Интеграл от ступенчатой функции  $f(x)$  определен постольку, поскольку  $f(x)$  остается ограниченной [2]. Чтобы интеграл

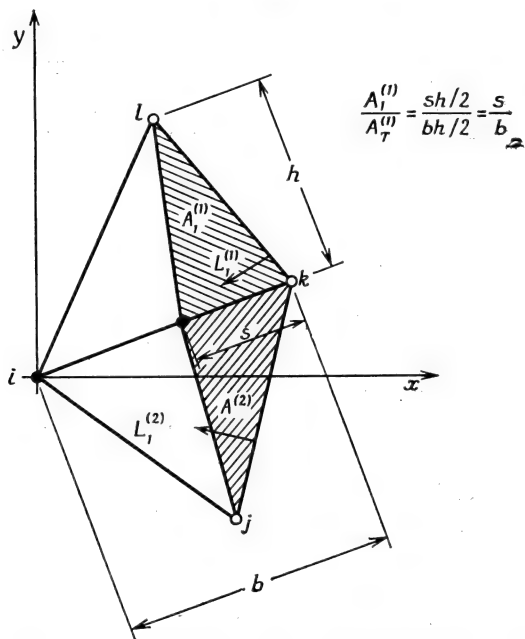
$$\int \frac{d^n \varphi}{dx^n} dx$$

был определен, функция  $\varphi$  должна быть непрерывна вместе со своими производными до порядка  $(n-1)$  включительно, что обеспечивает наличие у производной порядка  $n$  только конечного числа точек разрыва ступенчатого типа. Соблюдение этого условия означает, что первые частные производные от аппроксимирующей функции должны быть непрерывны на границах между элементами, если дифференциальное уравнение содержит частные производные второго порядка, т. е.  $n=2$ . Все дифференциальные уравнения, рассматриваемые в этой книге, могут быть представлены в форме соотношений, содержащих самое большее первые частные производные, поэтому от интерполяционных функций следует требовать непрерывности в межэлементной зоне, но их частные производные не должны подчиняться этому условию.

Непрерывность для одномерного элемента гарантирована, так как любые два смежных элемента имеют общий узел. Однако треугольный элемент сложнее. Рассмотрим два смежных элемента (фиг. 3.11). Начало системы координат поместим в  $i$ -м узле.



Фиг. 3.11. Непрерывность вдоль общей границы двух треугольных элементов.



Фиг. 3.12. Значения  $L$ -координат в точках на границе элемента.

Обозначим узловые значения через  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$ ,  $\Phi_k$  и  $\Phi_l$ . Аппроксимирующие функции для  $\varphi$  имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_i^{(1)} \Phi_i + N_k^{(1)} \Phi_k + N_l^{(1)} \Phi_l, \\ \varphi^{(2)} &= N_i^{(2)} \Phi_i + N_j^{(2)} \Phi_j + N_k^{(2)} \Phi_k,\end{aligned}\tag{3.50}$$

где верхний индекс обозначает элемент.

Доказать непрерывность  $\varphi$  вдоль общей границы элементов просто, если воспользоваться  $L$ -координатами.  $L$ -координаты  $L_1^{(1)}$  и  $L_1^{(2)}$  измеряются от сторон, противоположных  $i$ -му узлу. Перепишем формулы (3.50), используя  $L$ -координаты:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= L_1^{(1)} \Phi_i + L_2^{(1)} \Phi_k + L_3^{(1)} \Phi_l, \\ \varphi^{(2)} &= L_1^{(2)} \Phi_i + L_2^{(2)} \Phi_j + L_3^{(2)} \Phi_k.\end{aligned}\tag{3.51}$$

$L$ -координаты  $L_3^{(1)}$  и  $L_3^{(2)}$  измеряются от общей границы, поэтому вдоль этой границы  $L_3^{(1)} = L_3^{(2)} = 0$ . Соотношения (3.51) в точках общей границы сводятся к следующим:

$$\varphi^{(1)} = L_1^{(1)} \Phi_i + L_2^{(1)} \Phi_k = L_1^{(1)} \Phi_i + (1 - L_1^{(1)}) \Phi_k, \quad (3.52)$$

$$\varphi^{(2)} = L_1^{(2)} \Phi_i + L_3^{(2)} \Phi_k = L_1^{(2)} \Phi_i + (1 - L_1^{(2)}) \Phi_k,$$

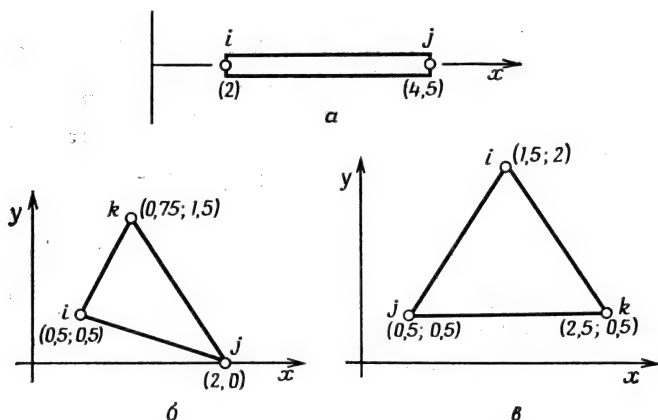
так как

$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad L_1^{(2)} + L_3^{(2)} = 1.$$

Рассмотрим произвольную точку общей границы, которая расположена на расстоянии  $s$  от  $k$ -го узла (фиг. 3.12). Отношения  $A_i^{(1)}/A_i^{(1)}$  и  $A_i^{(2)}/A_i^{(2)}$  равны величине  $s/b$  и, следовательно, равны между собой. С другой стороны, указанные отношения представляют собой числовые значения  $L$ -координат  $L_1^{(1)}$  и  $L_1^{(2)}$ , откуда можно заключить, что  $L_1^{(1)} = L_1^{(2)}$  для произвольной точки общей границы. Используя это равенство в формуле (3.52), получаем, что всюду вдоль границы  $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$ , что и требовалось доказать.

## Задачи

11. Вычислите функции формы для следующих элементов. Узловые координаты указаны в круглых скобках.

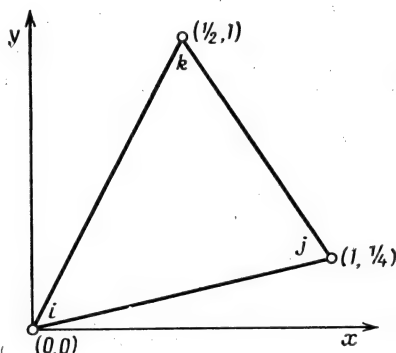


К задаче 11.

12. Определите локальные функции формы для одномерного элемента, если начало локальной системы координат расположено в центре элемента.

13. Узловые значения температуры для треугольного симплекс-элемента равны  $T_i=130^\circ\text{C}$ ,  $T_j=100^\circ\text{C}$  и  $T_k=120^\circ\text{C}$ . Выясните, где изотерма  $125^\circ\text{C}$  пересекает границы элемента.

14. Покажите, что  $N_i$  для симплексного треугольника равна нулю в узлах  $j$  и  $k$ .



К задаче 13.

15. Покажите, что  $N_i$  для симплексного треугольника равна нулю в произвольной точке отрезка, соединяющего узлы  $j$  и  $k$ .

16. Покажите, что функции формы для симплексного треугольника удовлетворяют критерию  $\sum_{k=1}^3 N_k = 1$  в каждой точке элемента.

17. Матрица  $[C]^{-1}$  для тетраэдрального элемента с узлами  $i, j, k$  и  $l$  в точках  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 2)$  соответственно имеет вид

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Убедитесь, что эта матрица является обратной к  $[C]$  и затем определите функции формы для этого элемента.

18. Что вы можете сказать о строках матрицы  $[C]^{-1}$  в задаче 17, если критерий сходимости  $N_i + N_j + N_k + N_l = 1$  удовлетворяется, когда рассматривается тетраэдральный элемент?

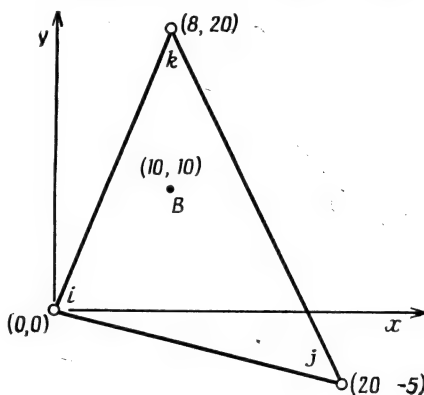
19. Определите градиент  $d\varphi/dx$  для тетраэдрального элемента двумя способами: 1) выбирая в качестве исходных соотношения

(3.16), выполняя дифференцирование, а затем умножение матриц;  
2) дифференцируя функции формы.

20. Заданы узловые перемещения для двумерного симплекс-элемента:

$$\begin{aligned} U_{2i-1} &= 2 \text{ мм}, & U_{2i} &= 4 \text{ мм}, & U_{2j-1} &= 6 \text{ мм}, \\ U_{2j} &= 5 \text{ мм}, & U_{2k-1} &= -1 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Определите компоненты перемещения в точке  $B$  (10, 10). Координаты узлов (в миллиметрах) указаны в круглых скобках.



К задаче 20.

21. Вычислите интеграл

$$\int_{\mathcal{L}_{ij}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} [N_i N_j N_k] d\mathcal{L},$$

где  $\mathcal{L}_{ij}$  — длина стороны симплексного треугольника между узлами  $i$  и  $j$ , а  $N_i$ ,  $N_j$  и  $N_k$  — функции формы.

22. Вычислите объемный интеграл

$$\int_V \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dV$$

для симплексного треугольника площади  $A$  и толщины  $t$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Eisenberg M. A., Malvern L. E., On Finite Element Integration in Natural Coordinates, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 7, 574—575 (1973).
2. Kaplan W., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.
3. Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, 3-rd ed., Wiley, N. Y., 1972.
4. Oden J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, N. Y., 125—137 (1972); есть русский перевод: Оден Дж., *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*, изд-во «Мир», М., 1977.
5. Zienkiewicz O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1971, p. 93; есть русский перевод: Зенкевич О., *Метод конечных элементов в технике*, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 4

### ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗОВАННОЙ ОБЛАСТИ

В гл. 3 обсуждались интерполяционные соотношения для симплекс-элементов. Числовые значения узловых координат при этом не фиксировались, так что размеры элемента и его ориентация могут быть выбраны так, как это необходимо. Это одно из важных достоинств метода конечных элементов. Свобода в выборе размеров и ориентации элементов позволяет составить весьма общие вычислительные подпрограммы, включающие различные элементы. Такие подпрограммы могут быть использованы без изменения при рассмотрении областей с самыми разнообразными границами.

Теперь сосредоточим внимание на отдельном элементе, с тем чтобы вывести систему уравнений для области в целом. Точнее говоря, мы хотим включить каждый элемент в рассматриваемую область и выразить через глобальные координаты и глобальные узловые значения интерполяционные уравнения для каждого используемого элемента. Начнем с рассмотрения скалярных величин и затем обобщим полученные результаты на случай векторных величин.

#### 4.1. Скалярные величины

Интерполяционный полином в общей форме, полученный в гл. 3, имеет вид

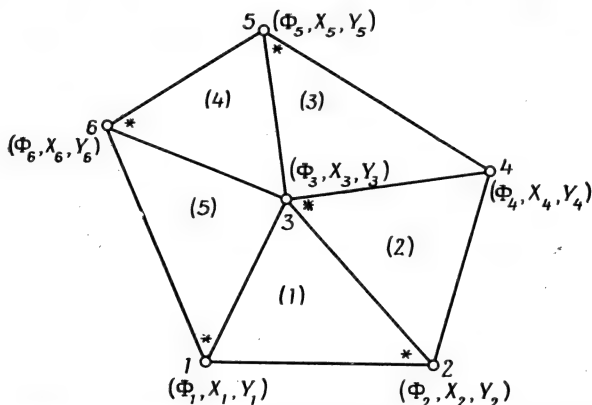
$$\varphi^{(e)} = [N] \{\Phi\} = [N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, N_k^{(e)} \dots N_r^{(e)}] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \vdots \\ \Phi_r \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

где  $r$  — число узлов элемента, верхний индекс  $(e)$  означает произвольный элемент.

Техника включения элемента в область может быть проиллюстрирована на примере простой пятиэлементной конфигурации, показанной на фиг. 4.1. Узлы пронумерованы от единицы до шес-

ти. Величины  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$  и  $\Phi_6$  представляют собой глобальные степени свободы. Координаты узлов  $(X_\beta, Y_\beta)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, 6$ , предполагаются известными. Номера элементов записаны в круглых скобках.

Для обозначения номеров узлов элемента могут быть использованы принятые выше индексы  $i, j$  и  $k$ , как только определен первый узел в каждом элементе. На фиг. 4.1  $i$ -й узел в



Фиг. 4.1. Правильно маркированная пятиэлементная область.

каждом элементе выделен звездочкой. Выбор этого узла совершенно произволен, хотя читатель вскоре сам убедится в удобстве именно такого расположения первых узлов. Узлы  $j$  и  $k$  следуют за  $i$ -м узлом в направлении против часовой стрелки. Фиксирование узла  $i$  позволяет записать следующие равенства для первого элемента:

$$i=2, \quad j=3, \quad k=1. \quad (4.2a)$$

Соответствие такого же типа может быть установлено для других элементов:

$$\text{элемент 2: } i=3, \quad j=2, \quad k=4, \quad (4.2б)$$

$$\text{элемент 3: } i=5, \quad j=3, \quad k=4, \quad (4.2в)$$

$$\text{элемент 4: } i=6, \quad j=3, \quad k=5, \quad (4.2г)$$

$$\text{элемент 5: } i=1, \quad j=3, \quad k=6. \quad (4.2д)$$

С помощью этих соотношений можно осуществить включение элемента в область, так как они ставят в соответствие индексы элемента  $i, j, k$  глобальным номерам узлов. Этот процесс фиксирует координаты узлов элемента.

Значения индексов  $i$ ,  $j$  и  $k$  могут быть подставлены в формулу (4.1), что приводит к следующей совокупности уравнений для элементов:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_2^{(1)} \Phi_2 + N_3^{(1)} \Phi_3 + N_1^{(1)} \Phi_1, \\ \varphi^{(2)} &= N_3^{(2)} \Phi_3 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_4^{(2)} \Phi_4, \\ \varphi^{(3)} &= N_5^{(3)} \Phi_5 + N_3^{(3)} \Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4, \\ \varphi^{(4)} &= N_6^{(4)} \Phi_6 + N_3^{(4)} \Phi_3 + N_5^{(4)} \Phi_5, \\ \varphi^{(5)} &= N_1^{(5)} \Phi_1 + N_3^{(5)} \Phi_3 + N_6^{(5)} \Phi_6.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Функции формы — множители при узловых значениях в формулах (4.3) — определяются подстановкой числовых значений  $i$ ,  $j$  и  $k$  в уравнения для функций формы. В обозначениях  $i$ ,  $j$ ,  $k$  функция формы  $N_k^{(e)}$  записывается в виде

$$N_k^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} [a_k^{(e)} + b_k^{(e)}x + c_k^{(e)}y] \quad (4.4)$$

где

$$a_k^{(e)} = X_i Y_j - X_j Y_i,$$

$$b_k^{(e)} = Y_i - Y_j,$$

$$c_k^{(e)} = X_j - X_i.$$

Для пятого элемента  $i=1$ ,  $j=3$  и  $k=6$ . Подставляя эти значения в выражение (4.4), получаем

$$N_6^{(5)} = \frac{1}{2A^{(5)}} [a_6^{(5)} + b_6^{(5)}x + c_6^{(5)}y], \quad (4.5)$$

где

$$a_6^{(5)} = X_1 Y_3 - X_3 Y_1,$$

$$b_6^{(5)} = Y_1 - Y_3,$$

$$c_6^{(5)} = X_3 - X_1.$$

Функции формы  $N_6^{(4)}$  и  $N_6^{(5)}$  в (4.3) — совершенно разные величины, даже если  $A^{(4)}$  равно  $A^{(5)}$ . В выражение для  $N_6^{(4)}$  входят следующие константы:

$$a_6^{(4)} = X_3 Y_5 - X_5 Y_3,$$

$$b_6^{(4)} = Y_3 - Y_5,$$

$$c_6^{(4)} = X_5 - X_3.$$

(4.6)

Сравнение формул (4.5) и (4.6) ясно показывает, что  $N$  отличается от  $N_6^{(5)}$ .

С помощью уравнений (4.3) достигается наша основная цель. Конечные элементы объединяются в ансамбль, а интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты, которые вводятся вместо произвольных  $i, j$  и  $k$ , рассматриваемых в гл. 3.

Каждое из уравнений в системе (4.3) содержит глобальные узловые значения, но относится к конкретному элементу. Мы будем в дальнейшем использовать расширенную форму этих уравнений, которая имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2 + N_3^{(1)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6, \\ \varphi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_3^{(2)} \Phi_3 + N_4^{(2)} \Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6, \\ \varphi^{(3)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(3)} \Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4 + N_5^{(3)} \Phi_5 + 0\Phi_6, \\ \varphi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(4)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + N_5^{(4)} \Phi_5 + N_6^{(4)} \Phi_6, \\ \varphi^{(5)} &= N_1^{(5)} \Phi_1 + 0\Phi_2 + N_3^{(5)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + 0\Phi_5 + N_6^{(5)} \Phi_6.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(4)} \\ \varphi^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} & N_4^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(3)} & N_4^{(3)} & N_5^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} & N_6^{(4)} \\ N_1^{(5)} & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & N_6^{(5)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Сокращенная форма интерполяционных уравнений используется, когда осуществляется машинная реализация метода. Расширенная форма имеет некоторое преимущество, когда рассматривается процесс минимизации, который связан с дифференцированием матриц элементов. Расширенная форма уравнений применяется только в следующих двух главах. Сокращенная форма уравнений будет использоваться, когда мы будем иметь дело с применением метода к специальным областям.

Альтернативой формулы (4.8) является уравнение, которое получается объединением уравнений для отдельных элементов; последнее уравнение определяет область в целом. Суммируя уравнения для отдельных элементов, получаем

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \varphi^{(e)}, \quad (4.9)$$

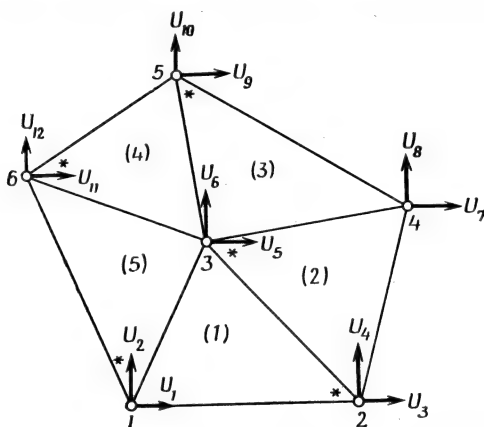
где  $E$  — число элементов. Применение формулы (4.9) к совокупности уравнений (4.8) дает

$$\begin{aligned}\Phi &= [N_1^{(1)} + N_1^{(5)}] \Phi_1 + [N_2^{(1)} + N_2^{(2)}] \Phi_2 + [N_3^{(1)} + N_3^{(2)} + N_3^{(3)} + N_3^{(4)} + \\ &+ N_3^{(5)}] \Phi_3 + [N_4^{(2)} + N_4^{(3)}] \Phi_4 + [N_5^{(3)} + N_5^{(4)}] \Phi_5 + [N_6^{(4)} + N_6^{(5)}] \Phi_6.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) не используется в этом учебнике. Оно включено только для того, чтобы познакомить читателя с его существованием.

## 4.2. Векторные величины

Включение элемента при рассмотрении векторных величин проводится с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в случае скалярной величины. Правильно пронумерован-



Фиг. 4.2. Пятиэлементная область с обозначениями компонент вектора перемещений.

ные узловые перемещения для области на фиг. 4.1 показаны на фиг. 4.2. Общее уравнение для элемента (3.23) приведено здесь для удобства:

$$\begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & N_j^{(e)} & 0 & N_k^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 & N_j^{(e)} & 0 & N_k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Соответствие между узлами элемента  $i, j$  и  $k$  и глобальными узлами идентично представленному в (4.2), если только используются те же самые отправные узлы. Соотношения для четвертого

элемента  $i=6, j=3, k=5$  сводятся к следующим:

$$\begin{Bmatrix} u^{(4)} \\ v^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_6^{(4)} & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} & 0 \\ 0 & N_6^{(4)} & 0 & N_3^{(4)} & 0 & N_5^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_5 \\ U_6 \\ U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix}. \quad (4.12)$$

Уравнения (4.12) представляют собой сокращенную форму уравнений для  $u^{(4)}$  и  $v^{(4)}$ . Расширенная форма будет включать все 12 узловых значений  $U_1, \dots, U_{12}$ . Расширенная форма уравнений, определяющих элементы, для области на фиг. 4.2 дана в (4.13):

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ u^{(2)} \\ v^{(2)} \\ u^{(3)} \\ v^{(3)} \\ u^4 \\ v^4 \\ u^5 \\ v^5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & 0 & N_2^{(1)} & 0 & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(1)} & 0 & N_2^{(1)} & 0 & N_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{(2)} & 0 & N_3^{(2)} & 0 & N_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2^{(2)} & 0 & N_3^{(2)} & 0 & N_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(3)} & 0 & N_4^{(3)} & 0 & N_5^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(3)} & 0 & N_4^{(3)} & 0 & N_5^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 & N_5^{(4)} & 0 & N_6^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 & N_5^{(4)} & 0 & N_6^{(4)} \\ N_1^{(5)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6^{(5)} & 0 \\ 0 & N_1^{(5)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.13)$$

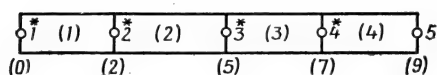
### 4.3. Выводы

Изложенные в этой главе идеи очень просты, но и очень важны, потому что позволяют осуществить закрепление элемента в каркасе тела. Воспроизведение этого процесса для отдельных элементов дает возможность аппроксимировать скалярную или векторную величину на всей области кусочно-непрерывной функцией.

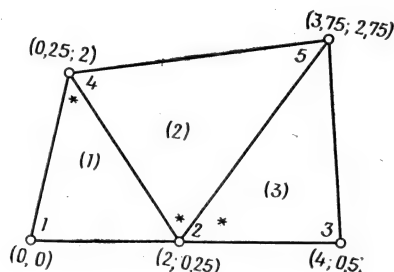
### Задачи

23—26. Определите соотношения, с помощью которых можно осуществить включение элементов в области, изображенные ниже. Отправной узел отмечен звездочкой. Узловые координаты даются в круглых скобках.

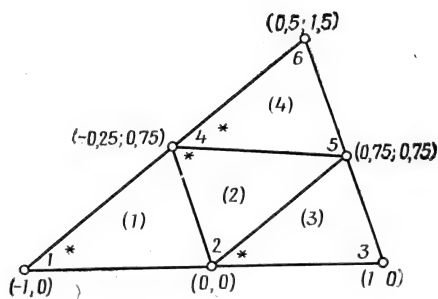
27—30. Получите общие уравнения, определяющие элементы, для областей в задачах 23—26, если в каждом узле рассматривается одна неизвестная.



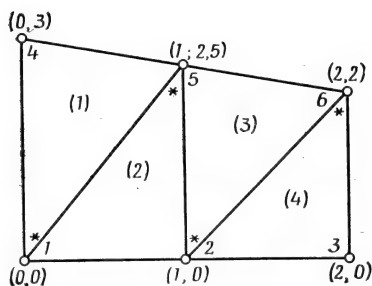
К задаче 23.



К задаче 24.



К задаче 25.



К задаче 26.

31—33. Получите общие уравнения, определяющие элементы, для областей в задачах 24—26, если в каждом узле рассматриваются две векторные компоненты.

34—37. Запишите интерполяционные соотношения для первого элемента каждой из областей в задачах 23—26 через  $x$  и  $y$  ( $x$  в задаче 23), предполагая, что в каждом узле отыскивается одна неизвестная.

## Глава 5

### РАССМОТРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В двух предыдущих главах рассматривался вопрос о том, как аппроксимировать непрерывную функцию на отдельном элементе. Кроме того, было показано, как из результатов, полученных для отдельных элементов, составляется множество кусочно-непрерывных функций, необходимое для аппроксимации данной непрерывной функции на всей области. Это множество кусочно-непрерывных функций определяется числовыми значениями узловых величин. Наша конечная цель — получить для узловых величин такие числовые значения, при которых соотношения для элементов очень точно аппроксимируют некоторый важный физический параметр. На ранней стадии развития метода конечных элементов узловые значения определялись минимизацией интегральной величины, связанной с физическим процессом. В задачах механики деформируемого тела, например, минимизировалась потенциальная энергия системы. В результате уравнения, определяющие элементы, сводились к системе алгебраических уравнений равновесия, которые можно разрешить относительно узловых перемещений. В задачах теории поля (перенос тепла, течение грунтовых вод, расчет магнитных полей и др.) минимизировался некоторый функционал. Этот функционал обладает тем свойством, что любая минимизирующая его функция удовлетворяет как исходным дифференциальным уравнениям, так и граничным условиям. Позднее для вывода системы уравнений, определяющих узловые значения, стали использоваться методы взвешенных невязок. Один из них, метод Галёркина, обсуждается в гл. 17.

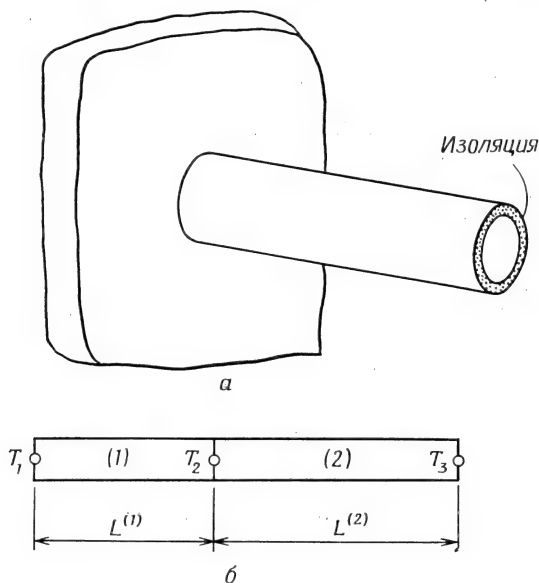
В данной главе дается вывод уравнений метода конечных элементов, основанный на минимизации некоторой интегральной величины. Мы начнем с рассмотрения небольшого примера, который иллюстрирует вывод уравнений для узловых значений искомой величины в задачах теории поля. Затем на том же примере мы покажем, что процесс минимизации может быть завершен до вычисления интегралов по элементам. После рассмотрения примера дается общий вывод уравнений метода конечных элементов для трехмерных задач теории поля. Глава завершается общим выводом уравнений метода конечных элементов для задач теории упругости. Окончательные результаты как для задач теории поля, так

и для задач теории упругости представлены в виде поверхностных и объемных интегралов, которые вычисляются при рассмотрении конкретных областей применения.

При последующем обсуждении предполагается наличие некоторых предварительных знаний стандартной терминологии рассматриваемого материала. Размерности различных величин вместе с их общепринятыми обозначениями приводятся в главах прикладного характера.

### 5.1. Простой пример: перенос тепла в стержне

Лучше всего процесс минимизации можно проиллюстрировать при рассмотрении простой геометрической фигуры. Рассмотрим одномерный поток тепла в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью (фиг. 5.1, *a*)<sup>1)</sup>. К закрепленному в стене концу



Фиг. 5.1. Двухэлементная модель, используемая в задаче о переносе тепла в стержне.

стержня подводится тепловой поток заданной интенсивности  $q$ . На свободном конце стержня происходит конвективный обмен тепла. Коэффициент теплообмена  $h$ , температура окружающей среды  $T_\infty$ , °С. Стержень теплоизолирован, так что потерь тепла через боковую поверхность не происходит.

<sup>1)</sup> Или в бесконечной пластине. — Прим. ред.

Запишем дифференциальное уравнение для распределения температуры внутри стержня:

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (5.1)$$

с граничными условиями

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + q = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (5.2)$$

и

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + h(T - T_\infty) = 0 \quad \text{при } x=L, \quad (5.3)$$

где  $K_{xx}$  — коэффициент теплопроводности материала стержня. Тепловой поток  $q$  положителен, если тепло отводится от стержня.

Уравнение (5.1) с приведенными граничными условиями имеет единственное решение. Оно является отправной точкой при получении численного решения методом конечных разностей. Другой метод решения задач переноса тепла основан на вариационном подходе. В вариационном исчислении<sup>1)</sup> устанавливается, что для минимизации функционала

$$\chi = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S \left[ qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right] dS \quad (5.4)$$

необходимо, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (5.5)$$

с граничными условиями

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + q + h(T - T_\infty) = 0. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.5) и (5.6) идентичны исходным уравнениям (5.1) — (5.3), поэтому любое распределение температуры, при котором функционал  $\chi$ , определяемый формулой (5.4), становится минимальным, также удовлетворяет дифференциальным уравнениям и, таким образом, является решением исходной задачи. Оба граничных условия (5.2) и (5.3) содержатся в (5.6), так как поверхностный интеграл в (5.4) должен быть разбит на два интеграла по каждой из торцовых поверхностей стержня.

<sup>1)</sup> Введение в этот предмет дано в приложении А.

Уравнение (5.4) служит отправной точкой для определения температуры в каждом узле. Мы минимизируем функционал (5.4), используя множество функций элементов, каждая из которых определена на отдельном элементе и выражена через узловые значения. Узловые значения  $T_\beta$  — неизвестные величины в нашей формулировке. Так как они определяют значение функционала  $\chi$ , минимизация  $\chi$  должна быть проведена по этим величинам.

Реализация метода конечных элементов начинается с определения подобластей и их узловых точек. Стержень может быть разбит на два линейных элемента (фиг. 5.1, б) с узловыми значениями  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Температура внутри элементов находится из формул

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2, \\ T^{(2)} &= N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Соответствующие функции формы определены соотношениями

$$N_i^{(1)} = \frac{X_l - x}{L^{(1)}}, \quad N_j^{(1)} = \frac{x - X_l}{L^{(1)}}.$$

Для рассматриваемого примера функционал представляет собой сумму следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} K_{xx} \left[ \frac{dT(x)}{dx} \right]^2 dV + \int_{S_1} q T(x) dS + \\ + \int_{S_2} \frac{h}{2} [T(x) - T_\infty]^2 dS, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — площади поверхностей, на которых заданы  $q$  и  $h$ . Значение функционала  $\chi$  получается подстановкой температуры  $T(x)$  и вычислением интегралов.

Поверхностные интегралы легко вычисляются, так как подынтегральным выражениям соответствуют узловые значения. Начнем с интеграла, включающего тепловой поток  $q$ :

$$\int_{S_1} q T(x) dS = q T_1 \int_{S_1} dS = q T_1 A_1, \quad (5.9)$$

где  $A_1$  — площадь поперечного сечения стержня, соответствующая первому узлу. Функция, описывающая изменение температуры  $T(x)$ , принимает постоянное значение  $T_1$  в точках сечения, соот-

ветствующего первому узлу. Рассмотрим поверхностный интеграл, включающий коэффициент теплообмена  $h$ :

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{h}{2} [T(x) - T_\infty]^2 dS &= \frac{h}{2} (T_3 - T_\infty)^2 \int_{S_2} dS = \\ &= \frac{hA_3 (T_3 - T_\infty)^2}{2} = \frac{hA_3}{2} (T_3^2 - 2T_3T_\infty + T_\infty^2), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $A_3$  — площадь поперечного сечения стержня и  $T_3$  — температура в третьем узле.

Объемный интеграл в (5.8) содержит производную от температуры. Дифференцируя (5.7), имеем

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2) \quad (5.11)$$

и

$$\frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3).$$

Объемный интеграл должен быть разбит на два интеграла, потому что выражение для  $dT/dx$  не сохраняет непрерывности по объему тела в целом. Разделение, подстановка и интегрирование дают

$$\begin{aligned} \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dV &= \frac{K_{xx}^{(1)} A^{(1)}}{2L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + \\ &+ \frac{K_{xx}^{(2)} A^{(2)}}{2L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

При вычислении интеграла предполагалось, что площадь поперечного сечения каждого элемента постоянна, так что  $dV = A^{(e)} dx$ .

Представление объемного интеграла по области в виде суммы интегралов, каждый из которых вычисляется по отдельному элементу, позволяет рассматривать различные свойства материала для различных элементов. Это является важной особенностью метода конечных элементов.

Значение функционала  $\chi$  получается сложением выражений (5.9), (5.10) и (5.12). В результате получается выражение для этого функционала через узловые значения температуры:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{C^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + \\ &+ qA_1T_1 + \frac{hA_3}{2} (T_3^2 - 2T_3T_\infty + T_\infty^2), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $C^{(1)} = A^{(1)}K_{xx}^{(1)}/L^{(1)}$  и  $C^{(2)} = A^{(2)}K_{xx}^{(2)}/L^{(2)}$ .

Правильными значениями  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  являются те, при которых величина  $\chi$  минимальна, поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial T_1} &= C^{(1)}T_1 - C^{(1)}T_2 + qA_1 = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_2} &= -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - C^{(2)}T_3 = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_3} &= -C^{(2)}T_2 + [C^{(3)} + hA_3]T_3 - hA_3T_\infty = 0.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Уравнения (5.14) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & [C^{(1)} + C^{(2)}] & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ hA_3T_\infty \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

или к более общей матричной форме

$$[K] \{T\} = \{F\}. \quad (5.16)$$

Матрицу коэффициентов  $[K]$  в формуле (5.16) обычно называют глобальной матрицей жесткости. Более уместным было бы назвать ее глобальной матрицей теплопроводности, поскольку мы имеем дело с задачей переноса тепла. Векторный столбец  $\{F\}$  есть глобальный вектор нагрузки.

Последний шаг нашего анализа заключается в задании конкретных значений для физических характеристик материала и получении числовых значений температуры  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Пусть

$$\begin{aligned}K_{xx} &= 75 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot ^\circ\text{C}), \\ h &= 10 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}), \\ A &= \pi \text{ см}^2, \\ L &= 7,5 \text{ см}, \\ q &= -150 \text{ Вт}/\text{см}^2\end{aligned}$$

(минус поставлен потому, что тепло подводится к телу) и  $T_\infty = 40^\circ\text{C}$ . Вычисляем коэффициенты:

$$\begin{aligned}C^{(1)} &= \frac{\pi \cdot 75}{3,75} = 20\pi = C^{(2)}, \\ hA_3 &= 10\pi, \\ -qA_1 &= -(-150)\pi = 150\pi\end{aligned}$$

и

$$hA_3T_\infty = 10 \cdot \pi \cdot 40 = 400 \pi.$$

Окончательная система уравнений имеет вид

$$\pi \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \pi \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 400 \end{Bmatrix}. \quad (5.17)$$

Этим уравнениям удовлетворяют следующие узловые значения температуры:  $T_1=70$ ,  $T_2=62,5$ ,  $T_3=55$ .

## 5.2. Повторное рассмотрение примера

Как следует из уравнения (5.15), процедура минимизации приводит к системе линейных уравнений, которые могут быть решены относительно узловых значений. Однако на цифровой вычислительной машине не легко реализовать процедуру минимизации в том виде, в каком она использовалась здесь для получения уравнений. Существует другой способ получения необходимой системы уравнений. Интегральная величина  $\chi$  разбивается на соответствующие отдельным элементам слагаемые, которые минимизируются по узловым значениям до того, как будут вычислены интегралы. В результате получается совокупность интегралов, которые могут быть вычислены и просуммированы по элементам.

Представим  $\chi$  в виде суммы

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}, \quad (5.18)$$

где  $\chi^{(1)}$  — сумма интегралов для первого элемента, а  $\chi^{(2)}$  — подобная сумма для второго элемента:

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= \int_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{2L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 dV + \int_{S^{(1)}} q T_1 dS, \\ \chi^{(2)} &= \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{2L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2 dV + \int_{S^{(2)}} \frac{h}{2} (T_3 - T_\infty)^2 dS, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $C^{(1)} = A^{(1)} K_{xx}^{(1)} / L^{(1)}$  и  $C^{(2)} = A^{(2)} K_{xx}^{(2)} / L^{(2)}$ . Продифференцируем теперь каждую компоненту  $\chi$  по всем узловым значениям. Начнем с  $\chi^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_1} &= \int_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2) (-1) dV + \int_{S^{(1)}} q dS, \\ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_2} &= \int_{V^{(1)}} \frac{C^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2) dV, \\ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial T_3} &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Вычисляя в этих соотношениях интегралы, получаем

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \{T\}} = \begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.21)$$

Дифференцируя вторую компоненту, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_1} &= 0, \\ \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_2} &= \int_{V_2} \frac{C^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3) (-1) dV, \\ \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial T_3} &= \int_{V^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3) dV + \int_{S^{(2)}} h (T_3 - T_\infty) dS, \end{aligned}$$

или после вычисления интегралов

$$\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \{T\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -hA_3 T_\infty \end{Bmatrix}. \quad (5.22)$$

Для минимизации  $\chi$  по узловым значениям необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \{T\}} + \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \{T\}} = 0. \quad (5.23)$$

Поэтому если сложить выражения (5.21) и (5.22) и результат приравнять нулю, то получим желаемую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & [C^{(1)} + C^{(2)}] & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)} + hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qA_1 \\ 0 \\ -hA_3 T_\infty \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.24)$$

Эта система идентична системе уравнений (5.15).

В изложенном подходе к процессу минимизации важно именно то, что система уравнений может быть получена для отдельных элементов. Суммирование по элементам в соответствии с формулой (5.23) представляет собой очень удобную для машинной реализации процедуру.

### 5.3. Уравнения метода конечных элементов: задачи теории поля

Одномерная задача распространения тепла, рассмотренная в предыдущих разделах, является одной из нескольких важных физических задач, которые могут быть описаны аналогичными диф-

ференциальными уравнениями в частных производных. Дифференциальное уравнение для каждого из этих физических процессов содержится в общем квазигармоническом уравнении

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (5.25)$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi_B \quad \text{на } S_1 \quad (5.26)$$

и (или)

$$K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0 \quad (5.27)$$

на  $S_2$ . Объединение  $S_1$  и  $S_2$  образует полную границу. Коэффициенты  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  и  $K_{zz}$ , а также величина  $q$  могут быть функциями  $x$ ,  $y$  и  $z$ , но предполагаются независимыми от  $\varphi$ . Величины  $l_x$ ,  $l_y$  и  $l_z$  в формуле (5.27) — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности. Уравнение (5.25) применимо как к изотропным, так и к анизотропным телам. Координатные оси, однако, должны быть параллельны главным осям инерции в анизотропных областях.

Уравнение (5.25) вместе с граничными условиями описывает распространение тепла в трехмерной области [4]. В этом случае  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  и  $K_{zz}$  соответствуют коэффициентам теплопроводности,  $Q$  — внутренний источник тепла или сток,  $q$  — тепловой поток на части поверхности и  $h$  — коэффициент теплообмена. Полевая функция  $\varphi$  определяет температуру тела. Уравнение для одномерного и двумерного случаев распространения тепла может быть получено из формулы (5.25) с учетом того, что  $\partial \varphi / \partial y = 0$  и (или)  $\partial \varphi / \partial z = 0$ . Если на той части границы, где  $\varphi$  не определено (на  $S_2$ ), обе величины  $q$  и  $h$  равны нулю, равенство (5.27) сводится к следующему условию:

$$K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z = 0, \quad (5.28)$$

которое отражает отсутствие переноса тепла (теплоизолированная граница).

Рассмотрим далее двумерную ситуацию, когда  $K_{xx} = K_{yy} = 1$ ,  $Q = 2G\theta$  и  $\varphi_B = 0$  на всей границе. В этом случае уравнение (5.25) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0, \quad (5.29)$$

которое встречается в задаче о кручении упругого стержня некругового сечения [5]. Полевая функция  $\varphi$  теперь является функцией напряжений,  $G$  — упругая характеристика материала,  $\theta$  —

угол закручивания сечения стержня. Напряжения сдвига, вызванные внешним крутящим усилием, получаются дифференцированием  $\varphi$  по  $x$  и  $y$ .

Другой важной двумерной задачей является задача о безвихревом течении жидкости. В этом примере  $K_{xx}=K_{yy}=1$ ,  $Q=0$  и уравнение (5.25) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.30)$$

с граничными условиями  $\varphi = \varphi_B$  и  $(\partial\varphi/\partial x)l_x + (\partial\varphi/\partial y)l_y = 0$  [6]. Если полевая функция  $\varphi$  задана на непроницаемых границах области (на границах, по нормали к которым не происходит течения жидкости), то уравнение (5.30) определяет линии тока при безвихревом течении жидкости. С другой стороны, если полевая функция определена на тех частях границы, по нормали к которым течет жидкость, то уравнение (5.30) описывает эквипотенциальные линии, которые ортогональны линиям тока.

Дифференциальное уравнение для ограниченного потока грунтовых вод [2] также содержится в (5.25). В этом случае

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0, \quad (5.31)$$

а граничные условия имеют вид  $\varphi = \varphi_B$  и (или)  $K_{xx}(\partial\varphi/\partial x)l_x + K_{yy}(\partial\varphi/\partial y)l_y + q = 0$ . Коэффициенты  $K_{xx}$  и  $K_{yy}$  определяют проницаемость почвы,  $Q$  — источник (или сток) воды, а полевая функция  $\varphi$  — пьезометрический напор. Величина  $q$  соответствует просачиванию воды через водоносный слой вдоль части его границы.

Другие важные физические задачи, которые описываются уравнением (5.25), связаны с рассмотрением электростатического и магнитостатического полей, а также жидких смазочных пленок. Последняя задача подробно изучена в работе [3].

С вариационной точки зрения решение уравнения (5.25) с граничными условиями (5.26) и (5.27) эквивалентно отысканию минимума функционала

$$\chi = \int_V \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\varphi \right] dV + \\ + \int_S \left[ q\varphi + \frac{1}{2} h (\varphi - \varphi_\infty)^2 \right] dS. \quad (5.32)$$

Минимизация функционала (5.32) должна быть осуществлена на множестве узловых значений  $\{\Phi\}$ . Для этой цели воспользуемся процедурой, рассмотренной в предыдущем разделе, а именно будем минимизировать функционал (5.32) перед вычислением ин-

тегралов. Этот подход позволяет выбрать характеристики элементов, наиболее приемлемые для каждой конкретной задачи.

Начнем процесс минимизации с преобразования функционала (5.32). Этот шаг несколько упрощает последующие операции. Введем две матрицы:

$$\{g\}^T = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \quad (5.33)$$

и

$$D = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Соотношение (5.32) может быть теперь записано в виде

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} [\{g\}^T [D] \{g\} - 2\Phi Q] dV + \int_{S_1} \Phi q dS + \\ + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\Phi^2 - 2\Phi\Phi_\infty + \Phi_\infty^2] dS. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Вспоминая, что функции от  $\Phi$  не являются непрерывными во всей области, вместо них введем в рассмотрение функции  $\Phi^{(e)}$ , определенные на отдельных элементах. Интегралы в (5.35) должны быть разбиты на интегралы по отдельным элементам, что дает

$$\begin{aligned} \chi = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} dV - \int_{V^{(e)}} \Phi^{(e)} Q^{(e)} dV + \\ + \int_{S_1^{(e)}} \Phi^{(e)} q^{(e)} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} [\Phi^{(e)}\Phi^{(e)} - 2\Phi^{(e)}\Phi_\infty + \Phi_\infty^2] dS, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где  $E$  — общее число элементов. Последнее соотношение может быть символически записано как

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}, \quad (5.37)$$

где  $\chi^{(e)}$  — вклад отдельного элемента в  $\chi$ . Минимизация  $\chi$  требует выполнения соотношения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = 0. \quad (5.38)$$

Частные производные  $\partial \chi^{(e)} / \partial \{\Phi\}$  в (5.38) не могут быть определены, пока интегралы в (5.36) не будут выражены через узловые значения  $\{\Phi\}$ . Учитывая соотношение (4.1):

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}] \{\Phi\},$$

можно вычислить величину (5.33), которая вместе с (4.1) может быть подставлена в (5.36). Запишем выражение для  $\{g^{(e)}\}$ :

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_p \end{Bmatrix}, \quad (5.39)$$

или

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{\Phi\}, \quad (5.40)$$

где  $[B]$  содержит информацию, связанную с производными от функций формы. Эти величины пока не известны, потому что функции формы еще не определены. Использование формул (4.1) и (5.40) позволяет записать интегралы по элементам в (5.36) в виде

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = & \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{\Phi\} dV + \\ & + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS - \\ & - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \varphi_\infty^2 dS. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Величины  $Q$ ,  $q$ ,  $\varphi_\infty$  и  $h$  — известные коэффициенты. Они внесены под знак интеграла, потому что могут изменяться внутри элемента. Дифференцирование величины (5.41) по  $\{\Phi\}$  представляет собой совершенно простую операцию, если пользоваться правилами дифференцирования, приведенными в приложении Б. Рассмотрим формулу (5.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV = \\ = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{\Phi\} dV &= \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV, \\
\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS, \\
\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS, \\
\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_{\infty} [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_{\infty} [N^{(e)}]^T dS, \\
\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \varphi_{\infty}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Вклад отдельного элемента  $\partial \chi^{(e)} / \partial \{\Phi\}$  в общую сумму в  $\partial \chi / \partial \{\Phi\}$  равен

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} &= \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \right) \{\Phi\} - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV + \\
&\quad + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_{\infty} [N^{(e)}]^T dS.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Эта совокупность интегралов может быть записана в компактной форме:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = [k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}, \tag{5.44}$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \tag{5.45}$$

и

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_{\infty} [N^{(e)}]^T dS. \tag{5.46}$$

Окончательная система уравнений получается после подстановки выражения (5.44) в (5.38):

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}) = 0, \quad (5.47)$$

или

$$[K] \{\Phi\} = \{F\}, \quad (5.48)$$

где

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (5.49)$$

и

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (5.50)$$

Интегралы в (5.45) определяют матрицу теплопроводности элемента  $[k^{(e)}]$ , а интегралы в (5.46) — вектор нагрузки элемента  $\{f^{(e)}\}$ . Эти интегралы представляют собой основные результаты этого раздела. Вычисление этих интегралов обсуждается в главах, где рассматриваются специальные области применения. Составление глобальной матрицы из матриц элементов иллюстрируется и описывается детально в следующей главе.

## 5.4. Уравнения метода конечных элементов: теория упругости

Решение задач теории упругости может быть проведено одним из двух методов. С помощью первого метода решают дифференциальные уравнения с заданными граничными условиями. Второй метод заключается в минимизации интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней приложенной нагрузки. Для решения задач теории упругости методом конечных элементов используется последний подход. Если задача решается в перемещениях и на границе заданы их значения, то нужно минимизировать потенциальную энергию системы. Если задача решается в напряжениях с заданными на границе усилиями, то нужно минимизировать дополнительную работу системы. Общепринятая формулировка метода конечных элементов предполагает отыскание поля перемещений и тем самым связана с минимизацией потенциальной энергии системы при отыскании узловых значений вектора перемещений. После того как перемещения будут определены, можно вычислить компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Поскольку далее мы будем пользоваться формулировкой метода конечных элементов, связанной с минимизацией потенциальной энергии, приведем здесь теорему о потенциальной энергии [1].

*Из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, стационарное (экстремальное) значение потенциальной энергии сообщают те перемещения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия.*

Важное требование этой теоремы состоит в том, что искомые перемещения должны удовлетворять заданным значениям на границе.

Полная потенциальная энергия упругой системы может быть разделена на две части, одна из которых соответствует энергии деформаций в теле, а другая определяется потенциальной энергией массовых сил и приложенных поверхностных сил. В соответствии с этим запишем полную потенциальную энергию в виде

$$\Pi = \Lambda + W_p, \quad (5.51)$$

где  $\Lambda$  — энергия деформаций, а  $W_p$  — потенциальная энергия приложенных сил. Работа внешних сил противоположна по знаку их потенциальной энергии:

$$W = -W_p. \quad (5.52)$$

Из формул (5.51) и (5.52) получаем

$$\Pi = \Lambda - W. \quad (5.53)$$

После разбиения области на элементы равенство (5.53) записывается в виде суммы

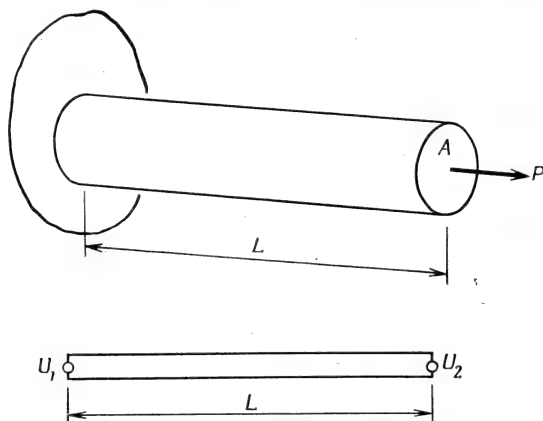
$$\Pi = \sum_{e=1}^E (\Lambda^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (5.54)$$

Прежде чем обсуждать минимизацию  $\Pi$  в общем случае, рассмотрим один простой пример.

#### 5.4.1. Осевое нагружение элемента конструкции

Применение теоремы о минимуме потенциальной энергии будет проиллюстрировано на примере осевого нагружения элемента конструкции, показанного на фиг. 5.2. Осевое перемещение изменяется линейно от нуля на закрепленном конце до величины  $\Delta = PL/AE$  на нагруженном конце. В этой формуле  $P$  — нагрузка,  $L$  — длина,  $A$  — площадь поперечного сечения детали конструкции,  $E$  — модуль упругости материала.

С помощью метода конечных элементов определим перемещение на нагруженном конце стержня. Решение задачи при этом начинается с выбора модели для перемещения. Эта модель зави-



Фиг. 5.2. Осевое нагружение детали конструкции.

сит от типа выбранного элемента. Мы будем использовать один линейный одномерный элемент, поэтому

$$u^{(1)} = N_1^{(1)} U_1 + N_2^{(1)} U_2$$

Так как  $U_1$  должно равняться нулю на закрепленном конце, вышеприведенное уравнение сводится к следующему:

$$u = N_2 U_2 = \frac{x}{L} U_2. \quad (5.55)$$

Потенциальная энергия определяется формулой

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_{xx} \epsilon_{xx}}{2} dV - P U_2. \quad (5.56)$$

Интегральное слагаемое представляет энергию деформаций, тогда как член вида  $P U_2$  выражает работу приложенной силы. Компонента тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  связана с компонентой тензора деформаций  $\epsilon_{xx}$  законом Гука  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ , поэтому выражение (5.56) может быть записано в виде

$$\Pi = A \int_0^L \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2 dx - P U_2, \quad (5.57)$$

где  $dV = A dx$ . Предполагается, что площадь поперечного сечения детали конструкции постоянна по длине.

Деформация  $\epsilon_{xx}$  связана с перемещением соотношением  $\epsilon_{xx} = du/dx$ . Дифференцирование выражения (5.55) дает

$$\epsilon_{xx} = \frac{U_2}{L}. \quad (5.58)$$

Потенциальная энергия системы теперь выражается следующим образом:

$$\Pi = \frac{AE}{2} \int_0^L \left( \frac{U_2}{L} \right)^2 dx - P U_2 = \frac{AE}{2L} U_2^2 - P U_2. \quad (5.59)$$

Минимизация  $\Pi$  по  $U_2$  приводит к уравнению

$$\frac{d\Pi}{dU_2} = \frac{AE}{L} U_2 - P = 0. \quad (5.60)$$

Решая уравнение (5.60), получаем

$$U_2 = \frac{PL}{AE}, \quad (5.61)$$

что совпадает с теоретическим значением. Теоретическое значение в рассматриваемом случае было достигнуто благодаря выбору модели перемещения, точно соответствующей физической задаче; перемещение изменяется линейно как в модели, так и в реальной физической задаче.

#### 5.4.2. Общий случай

Энергия деформации бесконечно малого объема  $dV$  дается формулой

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \frac{1}{2} \{\epsilon_0\}^T \{\sigma\}, \quad (5.62)$$

где  $\{\epsilon\}$  — полная деформация, а  $\{\epsilon_0\}$  — начальная деформация. Величина  $d\Lambda$  называется плотностью энергии деформации, а полная энергия деформации получается интегрированием этой величины по объему тела:

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} (\{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \{\epsilon_0\}^T \{\sigma\}) dV. \quad (5.63)$$

Вид векторных столбцов  $\{\epsilon\}$  и  $\{\sigma\}$  зависит от того, какая задача решается. Например, для двумерного случая плоской деформации

эти вектор-столбцы имеют вид

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}]$$

и

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}].$$

В основе курса теории упругости [5] лежат два важных соотношения: закон Гука, который связывает компоненты тензоров напряжений и деформаций, и соотношения связи между деформациями и перемещениями. Закон Гука в общей форме имеет вид

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - [D] \{\varepsilon_0\}, \quad (5.64)$$

где  $[D]$  содержит упругие константы материала. Соотношения связи между деформациями и перемещениями записываются как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты перемещений в направлении координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно<sup>1)</sup>. Эти компоненты перемещений были выражены в гл. 3 через узловые значения следующим образом:

$$\{u\} = [N] \{U\}. \quad (5.66)$$

Здесь  $[N]$  — матрица функций формы (3.24). С помощью формул (5.65) можно выразить вектор деформации  $\{\varepsilon\}$  через узловые перемещения  $\{U\}$ . Общая форма этих соотношений такова:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}. \quad (5.67)$$

Здесь  $[B]$  — матрица, получаемая дифференцированием надлежащим образом матрицы  $[N]$ . Фактические значения коэффициентов матрицы  $[B]$  зависят от вида используемого элемента и от типа рассматриваемой задачи. Поэтому точное определение  $[B]$  будет отложено до рассмотрения конкретных примеров.

Энергия деформации  $\Lambda^{(e)}$  отдельного элемента с помощью формул (5.64) и (5.67) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} - \\ &\quad - 2 \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} + \{\varepsilon_0^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\}) dV. \end{aligned} \quad (5.68)$$

<sup>1)</sup> Для того чтобы компоненты деформаций (5.65) образовывали тензор, необходимо правые части выражений  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  умножить на  $1/2$ . — Прим. ред.

Последнее слагаемое в (5.68) не зависит от узловых значений  $\{U\}$ , поэтому оно не влияет на процесс минимизации и в дальнейших ссылках на (5.68) не будет приниматься во внимание.

Работа, совершаемая внешними силами, может быть разделена на три различные части: работа  $W_c$ , совершаемая сосредоточенными силами, работа  $W_p$ , которая получается в результате действия компонент напряжений на внешней стороне поверхности, работа  $W_b$ , совершаемая массовыми силами.

Работу сосредоточенных сил легко определить, если в каждой точке приложения сосредоточенной силы поместить узел. Работа сосредоточенной силы равна произведению величины этой силы на длину пути, на котором эта сила действует. Таким образом, работа отдельной силы равна  $P \cdot U$ . Обозначая узловые силы через  $\{P\}$ , а узловые перемещения через  $\{U\}$ , совершенную работу можно записать в виде произведения матриц:

$$W_c = \{U\}^T \{P\} = \{P\}^T \{U\}. \quad (5.69)$$

Это определение предполагает, что силы разложены на компоненты, параллельные компонентам перемещений. Эта часть полной работы не входит в сумму (5.54), так как рассмотренные силы сосредоточены в узлах.

Работа объемных сил  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$  дается формулой

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} (u\mathcal{X} + v\mathcal{Y} + w\mathcal{Z}) dV, \quad (5.70)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты вектора перемещений внутри элемента по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Интеграл здесь необходим, так как  $u$ ,  $v$  и  $w$  вместе с  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Z}$  могут изменяться внутри элемента. Используя равенство (5.66), формулу (5.70) можно переписать в виде

$$W_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \mathcal{X}^{(e)} \\ \mathcal{Y}^{(e)} \\ \mathcal{Z}^{(e)} \end{Bmatrix} dV. \quad (5.71)$$

Работа поверхностных сил определяется следующим образом:

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} (up_x^{(e)} + vp_y^{(e)} + wp_z^{(e)}) dS, \quad (5.72)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты вектора перемещений, а  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  — компоненты вектора напряжений, параллельные координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Сравнение формул (5.72) и (5.70) показывает, что они идентичны по форме. Поэтому

$$W_p^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS. \quad (5.73)$$

Используя формулы (5.54), (5.68), (5.69), (5.71) и (5.73), получаем выражение для полной потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{e=1}^E & \left[ \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV - \right. \\ & - \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV - \\ & - \int_{V^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \mathcal{X}^{(e)} \\ \mathcal{Y}^{(e)} \\ \mathcal{Z}^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \\ & \left. - \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \{U\}^T \{P\}. \quad (5.74) \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать величину  $\Pi$ , продифференцируем выражение (5.74) по  $\{U\}$  и приравняем результат нулю. Эту операцию можно выполнить, используя дифференциальные соотношения Б1 и Б2. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^E & \left[ \int_{V^{(e)}} [B^{(e)T}] [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{U\} - \right. \\ & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)T}] [D^{(e)}] \{\varepsilon_0\} dV - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)T}] \begin{Bmatrix} \mathcal{X}^{(e)} \\ \mathcal{Y}^{(e)} \\ \mathcal{Z}^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \\ & \left. - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)T}] \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \right] - \{P\} = 0. \quad (5.75) \end{aligned}$$

Интегралы в формуле (5.75) определяют для каждого элемента вектор нагрузки  $\{f^{(e)}\}$  и матрицу жесткости  $[k^{(e)}]$ , которые можно объединить следующим образом:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + \{f^{(e)}\}. \quad (5.76)$$

Уравнение (5.76) очень похоже на уравнение (5.44). В рассматриваемом случае  $[k^{(e)}]$  — объемный интеграл вида

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV, \quad (5.77)$$

а  $\{f^{(e)}\}$  — сумма нескольких интегралов:

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} = & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\Delta T^{(e)}\} dV - \\ & - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left\{ \begin{matrix} \mathcal{X}^{(e)} \\ \mathcal{Y}^{(e)} \\ \mathcal{Z}^{(e)} \end{matrix} \right\} dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left\{ \begin{matrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{matrix} \right\} dS - \{P\}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Матрица жесткости элемента (5.77) не содержит поверхностный интеграл, который встречается в задачах теории поля. Объемный интеграл в формуле (5.77) по форме идентичен объемному интегралу в (5.45), хотя числовые значения  $[B^{(e)}]$  и  $[D^{(e)}]$  совершенно разные в этих двух случаях.

Глобальная матрица жесткости  $[K]$  и глобальный вектор-столбец  $\{F\}$  в матричном уравнении

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (5.79)$$

даются соотношениями

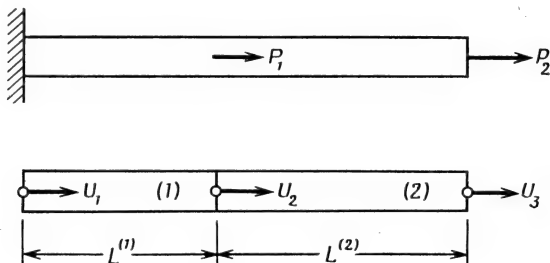
$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad (5.80)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (5.81)$$

## Задачи

38. Выведите уравнения для примера в разд. 5.1, если правый конец стержня, третий узел, теплоизолирован, а по боковой поверхности происходит конвективный обмен тепла.

**39.** Выведите систему уравнений для перемещений в изображенном ниже элементе конструкции, подверженном осевой нагрузке. Используйте двухэлементную модель с узловыми перемещениями  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ . Заметим, что значение  $U_1$  должно равняться нулю.



К задаче 39.

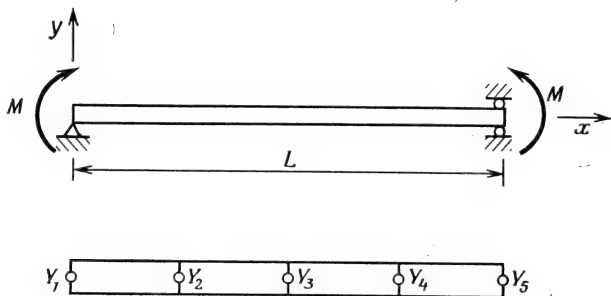
**40.** Прогиб опертой балки, подверженной действию постоянного изгибающего момента  $M$ , описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{M}{EI} = 0, \quad y_0 = y_L = 0,$$

где  $EI$  — жесткость поперечного сечения, не зависящая от длины.

а) Дайте вариационную формулировку этой задачи.

б) Выведите систему уравнений для определения  $Y_2$ ,  $Y_3$  и  $Y_4$ , используя четырехэлементную модель, показанную ниже.



К задаче 40.

**41.** Покажите, что объемный интеграл в формуле (5.35) эквивалентен объемному интегралу в (5.32).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fung Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Harr M. E., Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, N. Y., 1962.
3. Huebner K. H., The Finite Element Method for Engineers, Wiley, N. Y., 1975.
4. Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed., Intex Educational Publishers, N. Y., 1973.
5. Timoshenko S. P., Goodier J. N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, N. Y., 1970; есть русский перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости, изд-во «Наука», М., 1975.
6. Vallentine H. R., Applied Hydrodynamics, Butterworth, London, 1959.

## Глава 6

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

В четырех предыдущих главах рассматриваются вопросы дискретизации тела, построения интерполяционного полинома для отдельного элемента и использование интерполяционных полиномов для дискретизованной области, а также дается вывод основных уравнений. Каждая из этих глав содержит исходную информацию, связанную с методом конечных элементов. В этой главе мы переходим от рассмотрения теории метода к его реализации. Ее цель — проиллюстрировать все этапы реализации метода. Эта цель достигается путем получения численного решения задачи о кручении стержня некругового сечения.

Выбор именно этой задачи для иллюстрации реализации метода конечных элементов объясняется двумя причинами. Во-первых, в этом случае относительно просто выводятся уравнения метода конечных элементов. Матрица  $[K]$  легко вычисляется, а интегралы по границе области обращаются в нуль в силу задания нулевых граничных значений искомой функции. Во-вторых, концепции, используемые при рассмотрении кручения стержня некругового сечения, одинаково важны как для механических задач, так и для задач теории поля. Хотя теория кручения стержней представляет собой самостоятельный раздел механики деформируемого тела, используемые в ней дифференциальные уравнения аналогичны уравнениям, которые описывают перенос тепла и течение грунтовых вод.

#### 6.1. Общая теория кручения стержня

Согласно теории<sup>1)</sup> кручения цилиндрических стержней с произвольной формой сечения, сдвиговые напряжения, возникающие в теле в результате действия крутящего момента  $T$  относительно оси  $z$  (фиг. 6.1), могут быть вычислены в произвольной точке тела по

---

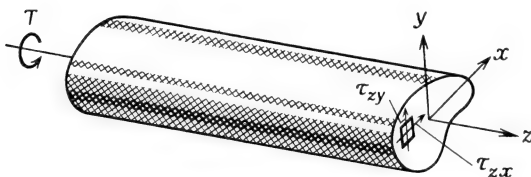
<sup>1)</sup> Существуют две теории кручения стержней некругового сечения. Одна из них была развита Сен-Венаном, другая — Прандтлем. Обе теории обсуждаются в работе [1]. Вариационная теория Прандтля, используемая в этой главе, описана в книге Тимошенко и Гудьера [3].

формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (6.1)$$

где  $\varphi$  — функция напряжений. Дифференциальное уравнение для этой функции имеет вид

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\theta = 0, \quad (6.2)$$



Фиг. 6.1. Сдвиговые напряжения в стержне некругового сечения, подверженном действию крутящего момента.

а граничное условие записывается как

$$\varphi = 0. \quad (6.3)$$

В уравнение (6.2) как параметры входят модуль сдвига материала  $G$  [Н/см<sup>2</sup>] и крутка (угол закручивания на единицу длины)  $\theta$  [рад/см]. При такой постановке задачи дифференциальное уравнение не содержит приложенного крутящего момента  $T$  [Н·см]. Величина  $T$  вычисляется после решения уравнения (6.2) по формуле

$$T = 2 \int_{\Sigma} \varphi dA. \quad (6.4)$$

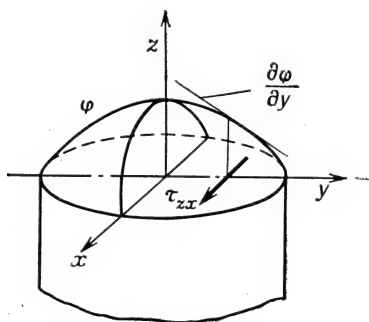
Функцию напряжений можно наглядно представить как некоторую поверхность, охватывающую поперечное сечение стержня (фиг. 6.2). Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому этой поверхностью, а сдвиговые напряжения связаны с углами наклона касательных к этой поверхности<sup>1)</sup> в плоскостях  $xz$  и  $yz$ . Уравнение (6.2) обычно записывают в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0. \quad (6.5)$$

<sup>1)</sup> Это так называемая мембранная аналогия (см. [3], стр. 309). — Прим. ред.

Вариационная формулировка задачи о кручении стержня связана с рассмотрением функционала

$$\chi = \int_V \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\varphi \right] dV, \quad (6.6)$$



Фиг. 6.2. Поверхность функции напряжений  $\varphi$  и соответствующее сдвиговое напряжение.

который в соответствии с изложенным в гл. 5 может быть записан в виде

$$\chi = \int_V \left[ \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - (2G\theta)\varphi \right] dV, \quad (6.7)$$

где

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

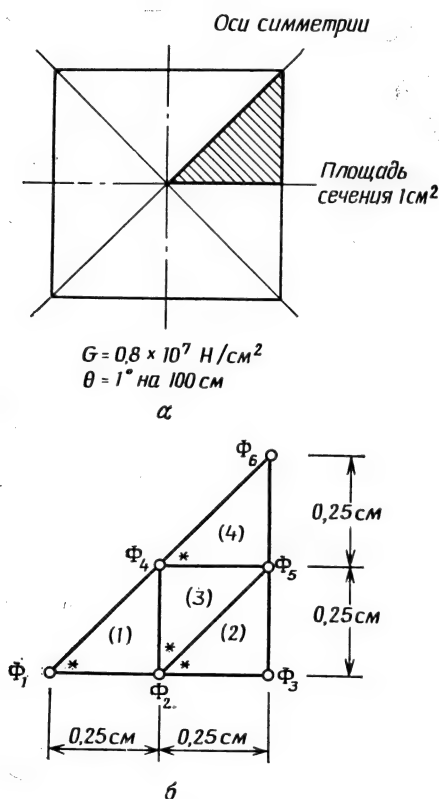
Вектор-столбец  $\{g\}$  соответствует сдвиговым напряжениям, матрица  $[D]$  становится единичной, так как  $K_{xx} = K_{yy} = 1$ . Минимизация  $\chi$  по  $\{\Phi\}$  приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{\Phi\} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2G\theta) dV, \quad (6.8)$$

где  $[N^{(e)}]$  определена в формуле (4.1), а  $[B^{(e)}]$  — матрица градиентов, определенная в формуле (5.39). К решению системы (6.8) приступают после того, как выбрана форма сечения и это сечение разбито на элементы.

## 6.2. Построение матриц элементов

Чтобы показать, как определяются матрицы элементов и каким образом с их помощью формируется система линейных уравнений, рассмотрим стержень с поперечным сечением в форме квадрата (фиг. 6.3,а). В связи с наличием четырех осей симметрии можно рассматривать только  $1/8$  квадрата. Разобьем эту часть сечения на четыре элемента, как показано на фиг. 6.3,б. Четырех



Фиг. 6.3. Разбиение области на элементы в задаче о кручении стержня квадратного сечения.

элементов мало для получения приемлемой точности решения, но вполне достаточно для иллюстрации техники получения необходимой системы уравнений, что является нашей целью.

Согласно методам, изложенным в гл. 4, представим интерполяционные полиномы для элементов в виде

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2 + 0 \Phi_3 + N_4^{(1)} \Phi_4 + 0 \Phi_5 + 0 \Phi_6, \\ \varphi^{(2)} &= 0 \Phi_1 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_3^{(2)} \Phi_3 + 0 \Phi_4 + N_5^{(2)} \Phi_5 + 0 \Phi_6, \\ \varphi^{(3)} &= 0 \Phi_1 + N_2^{(3)} \Phi_2 + 0 \Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4 + N_5^{(3)} \Phi_5 + 0 \Phi_6, \\ \varphi^{(4)} &= 0 \Phi_1 + 0 \Phi_2 + 0 \Phi_3 + N_4^{(4)} \Phi_4 + N_5^{(4)} \Phi_5 + N_6^{(4)} \Phi_6.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Общая формула для матрицы жесткости элемента записывается как

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] dV.$$

Здесь учтено, что  $[D] = [I]$  в рассматриваемом случае. Для определения  $[B^{(1)}]$  необходимо дифференцировать  $[\varphi^{(1)}]$  по  $x$  и  $y$ . Рассмотрим подробно первый элемент:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial x} \quad 0 \quad 0 \right] = \\ &= \frac{1}{2A^{(1)}} [b_1^{(1)} \quad b_2^{(1)} \quad 0 \quad b_4^{(1)} \quad 0 \quad 0],\end{aligned}\quad (6.10a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} &= \left[ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} \quad \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \right] = \\ &= \frac{1}{2A^{(1)}} [c_1^{(1)} \quad c_2^{(1)} \quad 0 \quad c_4^{(1)} \quad 0 \quad 0].\end{aligned}\quad (6.10b)$$

Матрица градиентов  $[B^{(1)}]$  имеет вид

$$[B^{(1)}] = \frac{1}{2A^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_4^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad (6.11)$$

Площадь этого элемента

$$A^{(1)} = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2A^{(1)}} = 16.$$

Коэффициенты  $b$  и  $c$  равны

$$\begin{aligned}b_1^{(1)} &= Y_2 - Y_4 = -0,25, & c_1^{(1)} &= X_4 - X_2 = 0, \\ b_2^{(1)} &= Y_4 - Y_1 = 0,25, & c_2^{(1)} &= X_1 - X_4 = -0,25, \\ b_4^{(1)} &= Y_1 - Y_2 = 0, & c_4^{(1)} &= X_2 - X_1 = 0,25.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу (6.11), получаем

$$[B^{(1)}] = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad (6.12)$$

Произведение  $[B^{(1)}]^T [B^{(1)}]$  равно

$$[B^{(1)}]^T [B^{(1)}] = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

или

$$[B^{(1)}]^T [B^{(1)}] = \begin{bmatrix} 16 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Матрица жесткости элемента представляет собой интеграл от (6.13). Так как произведение матриц  $[B^{(1)}]^T [B^{(1)}]$  является постоянной величиной, оно может быть вынесено из-под интеграла, что дает

$$[k^{(1)}] = [B^{(1)}]^T [B^{(1)}] \int_{V^{(1)}} dV = [B^{(1)}]^T [B^{(1)}] A^{(1)}.$$

Толщина элемента предполагается при этом единичной. Воспользовавшись формулой (6.13) и тем, что  $A^{(1)} = 1/32$ , получаем

$$[k^{(1)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Объемный интеграл

$$\{f^{(1)}\} = \int_{V^{(1)}} 2G^{(1)\theta} \begin{bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ 0 \\ N_4^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dV$$

вычисляется просто, если воспользоваться системой  $L$ -координат, рассмотренной в гл. 3:

$$L_1 = N_1^{(1)}, \quad L_2 = N_2^{(1)}, \quad L_3 = N_4^{(1)}. \quad (6.15)$$

Объемный интеграл запишется как

$$\{f^{(1)}\} = \int_{V^{(1)}} 2G^{(1)} \theta \begin{bmatrix} -L_1 \\ L_2 \\ 0 \\ L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dV. \quad (6.16)$$

Предполагая толщину элемента единичной и применяя интегральную формулу (3.43), находим

$$\{f^{(1)}\} = \frac{2G^{(1)}\theta A^{(1)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.17)$$

Подстановка значений  $G^{(1)}$ ,  $\theta$  и  $A^{(1)}$  дает<sup>1)</sup>

$$\{f^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 29,07 \\ 29,07 \\ 0 \\ 29,07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.18)$$

Таким образом, система уравнений для первого элемента имеет вид

$$[k^{(1)}] \{\Phi\} = \{f^{(1)}\}$$

или

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29,07 \\ 29,07 \\ 0 \\ 29,07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.19a)$$

<sup>1)</sup> В качестве единиц размерности выбраны Н/см<sup>2</sup> для  $G$ , см<sup>2</sup> для  $A^{(1)}$  и рад/см для  $\theta$ .  $\theta = \pi/180 \times 1/100$  при закручивании стержня на 1° на длине 100 см.

Аналогично можно получить систему уравнений для любого другого элемента. Окончательные выражения для матриц остальных элементов приводятся ниже:

$$[k^{(2)}] \{\Phi\} = \{f^{(2)}\},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 29,07 \\ 29,07 \\ 0 \\ 29,07 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.19\text{б})$$

$$[k^{(3)}] \{\Phi\} = \{f^{(3)}\},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 29,07 \\ 0 \\ 29,07 \\ 29,07 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.19\text{в})$$

$$[k^{(4)}] \{\Phi\} = \{f^{(4)}\},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 29,07 \\ 29,07 \\ 29,07 \end{Bmatrix}. \quad (6.19\text{г})$$

Окончательная полная система уравнений получается алгебраическим суммированием уравнений для отдельных элементов. Она имеет вид

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29,07 \\ 87,22 \\ 29,07 \\ 87,22 \\ 87,22 \\ 29,07 \end{Bmatrix}. \quad (6.20)$$

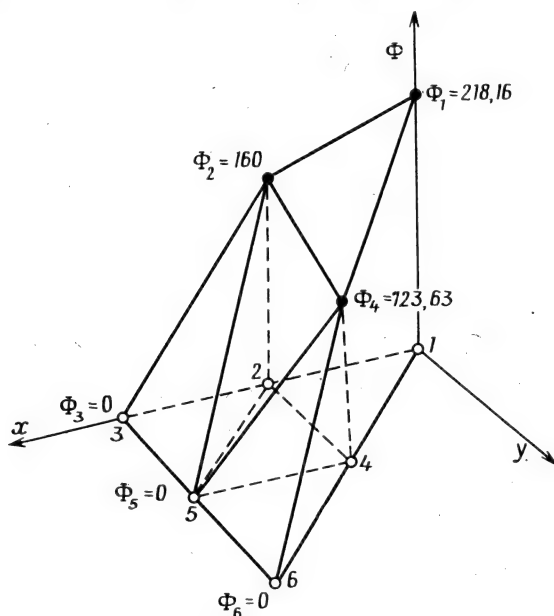
Величины  $\Phi_3$ ,  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$  равны нулю, так как соответствующие им узлы расположены на внешней границе. Преобразуя систему

уравнений (6.20) и решая ее, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 218,16, & \Phi_3 &= 0, \\ \Phi_2 &= 160, & \Phi_5 &= 0, \\ \Phi_4 &= 123,63, & \Phi_6 &= 0.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Преобразование системы уравнений (6.20) обсуждается в следующей главе, где рассматривается реализация метода конечных элементов с помощью вычислительной машины. Поверхность  $\Phi$ , соответствующая полученному множеству узловых значений, представлена на фиг. 6.4.

Определение узловых значений — главный шаг в решении задачи. Однако в большинстве случаев бывает необходимо вычислять еще целый набор величин для каждого элемента. Такие ве-



Фиг. 6.4. Узловые значения функции напряжений в задаче о кручении стержня, вычисленные для четырех-элементной модели.

личины ниже будут называться результатами элемента. В рассмотренной задаче, например, интересно знать такие результаты, как значения сдвиговых напряжений в каждом элементе и крутящего момента  $T$ , который вызывает закручивание стержня на угол  $\theta$ . Методика вычисления результатов элемента обсуждается в следующем разделе.

### 6.3. Стандартные результаты элемента

В задаче о кручении стержня важными величинами являются производные функции  $\Phi$ , поскольку они просто связаны с напряжениями сдвига:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Значения сдвиговых напряжений легко вычислить, так как матрица градиентов для каждого элемента уже определена. Матрица градиентов для первого элемента представлена в формуле (6.11):

$$\{g^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B^{(1)}] \{\Phi\},$$

$$\{g^{(1)}\} = \frac{1}{2A^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_4^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}.$$

С учетом формул (6.12) и (6.21) получаем

$$\{g^{(1)}\} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 218,16 \\ 160,0 \\ 0 \\ 123,63 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -232,6 \\ -145,4 \end{Bmatrix}.$$

Поэтому

$$\tau_{zx}^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -145,4 \text{ Н/см}^2,$$

$$\tau_{zy}^{(1)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 232,6 \text{ Н/см}^2.$$

Компоненты тензора напряжений для других элементов вычисляются аналогично:

элемент 2:  $\tau_{zx} = 0 \text{ Н/см}^2$ ,  $\tau_{zy} = 639,4 \text{ Н/см}^2$ ,

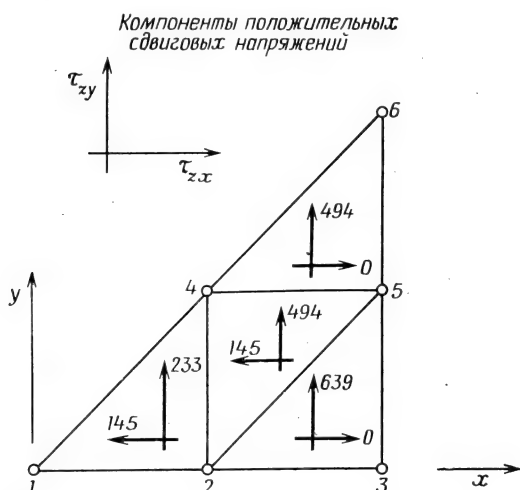
элемент 3:  $\tau_{zx} = -145,4 \text{ Н/см}^2$ ,  $\tau_{zy} = 494,0 \text{ Н/см}^2$ ,

элемент 4:  $\tau_{zx} = 0 \text{ Н/см}^2$ ,  $\tau_{zy} = 494,0 \text{ Н/см}^2$ .

Эти значения схематически показаны на фиг. 6.5.

Сдвиговые напряжения получаются постоянными в каждом из элементов потому, что интерполяционные полиномы для элементов

взяты линейными по  $x$  и  $y$ . Невозможность получения переменных по площади элемента производных является недостатком использования симплекс-элементов.



Фиг. 6.5. Сдвиговые напряжения в задаче о кручении стержня, вычисленные для четырехэлементной модели. Все значения выражены в ньютонах на квадратный сантиметр.

Уточнить значения напряжений внутри стержня, полученные в данном примере, можно тремя способами. Во-первых, можно увеличить число элементов, используемых при разбиении области поперечного сечения. Так как при этом размеры элементов уменьшаются, вычисленные значения напряжений оказываются более близкими к действительным. Во-вторых, можно использовать треугольный элемент с большим числом узлов, а в интерполяционные полиномы включить квадратные и кубические члены. Тогда в результате дифференцирования будут получаться градиенты, являющиеся функциями координат. Третий подход заключается в применении теории сопряженной аппроксимации. Эта теория позволяет определять напряжения в узловых точках, а также напряжения внутри элемента как функции координат  $x$ ,  $y$ . Применение этой теории обсуждается в следующем разделе.

Другим заслуживающим внимания результатом является крутящий момент  $T$ , который представлен формулой (6.4):

$$T = 2 \int_{\Sigma} \varphi dA,$$

где  $\Sigma$  — площадь поперечного сечения стержня.

Этот интеграл эквивалентен следующему:

$$T = \sum_{e=1}^E \int_{\Sigma} 2\varphi^{(e)} dA, \quad (6.22)$$

где  $\varphi^{(e)}$  определяется формулой (6.9). Начнем рассмотрение с первого элемента:

$$2 \int_{A^{(1)}} \varphi^{(1)} dA = 2 \int_{A^{(1)}} [N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)} \quad 0 \quad N_4^{(1)} \quad 0 \quad 0] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} dA, \quad (6.23)$$

или

$$2 \int_{A^{(1)}} \varphi^{(1)} dA = 2 [\Phi]^T \int_{A^{(1)}} [N^{(1)}]^T dA. \quad (6.24)$$

Последнее выражение идентично интегралу в (6.16). Можно сразу сделать вывод, что

$$2 \int_{A^{(1)}} \varphi^{(1)} dA = \frac{2A^{(1)}}{3} [\Phi]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{2A^{(1)}}{3} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4). \quad (6.25)$$

Подстановка узловых значений дает

$$2 \int_{A^{(1)}} \varphi^{(1)} dA = \frac{2A^{(1)}}{3} (218,16 + 160 + 123,63) = \frac{2A^{(1)}}{3} (501,79).$$

Аналогично находим для остальных элементов

$$2 \int_{A^{(2)}} \varphi^{(2)} dA = \frac{2A^{(2)}}{3} (\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5) = \frac{2A^{(2)}}{3} (160),$$

$$2 \int_{A^{(3)}} \varphi^{(3)} dA = \frac{2A^{(3)}}{3} (\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_4) = \frac{2A^{(3)}}{3} (283,63),$$

$$2 \int_{A^{(4)}} \varphi^{(4)} dA = \frac{2A^{(4)}}{3} (\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6) = \frac{2A^{(4)}}{3} (123,63).$$

Суммируя эти соотношения и замечая, что площади элементов одинаковы, получаем

$$T = \sum_{e=1}^E \int_{A^{(e)}} 2\varphi^{(e)} dA = \frac{2A}{3} (501,79 + 160 + 283,63 + 123,63),$$

$$T = \frac{2A}{3} (1069,05) = \frac{1069}{3(16)}.$$

Поскольку на элементы разбивалась только  $1/8$  области поперечного сечения, полный крутящий момент  $M$  равен

$$M = 8T = 8 \frac{(1069)}{48} = 178,16 \text{ Н·см.}$$

Это означает, что крутящий момент величиной 178 Н·см вызывает закручивание на  $1^\circ$  стального стержня длиной 100 см и с поперечным сечением в форме квадрата со стороной в 1 см. Однако точность этого результата весьма сомнительна вследствие выбора грубой сетки разбиения. В самом деле, теоретическое значение <sup>1)</sup> момента равно 196,3 Н·см. Наш результат на 9,5% меньше этой величины.

#### 6.4. Согласованные результаты элемента

Недостатком применения линейных интерполяционных полиномов является невозможность получить градиенты как функции  $x$  и  $y$ . Градиент и любая связанная с ним величина получаются постоянными внутри элемента. Чтобы иметь более приемлемые значения узловых величин применяются различные методы усреднения. Можно, например, в качестве значения градиента в данном узле принять среднюю по всем окружающим этот узел элементам величину. Узловые значения результатов элемента можно также получить с помощью теории сопряженной аппроксимации [2]. Эта теория дает значения результатов элемента, согласованные с аппроксимирующими полиномами для векторной или скалярной величины.

Изложение теории сопряженной аппроксимации выходит за рамки данной книги. Применение этой теории, однако, не представляет труда и будет проиллюстрировано на четырехэлементной модели рассмотренной выше задачи о кручении.

<sup>1)</sup> Связь между приложенным крутящим моментом и углом закручивания квадратного стержня со стороной, равной  $2a$ , дается формулой  $T = 0,1406G\theta(2a)^4$  ([3], формула 170 на стр. 313). Для рассматриваемого примера  $2a = 1$  и  $T = 0,1406G\theta = 196,3 \text{ Н·см.}$

Узловые значения результатов элемента получаются решением системы уравнений

$$[C] \{\sigma\} = \{R\}, \quad (6.26)$$

где  $[C]$  и  $\{R\}$  представляют собой сумму матриц элементов вида

$$[c^{(e)}] = \int_V [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV \quad (6.27)$$

и

$$\{r^{(e)}\} = \int_V \bar{\sigma} [N^{(e)}]^T dV, \quad (6.28)$$

а  $\bar{\sigma}$  — стандартный результат элемента. Определить  $\{r^{(e)}\}$  несложно, потому что величина  $\bar{\sigma}$  постоянна внутри элемента. Легко вычислить  $[c^{(e)}]$ , используя плоские  $L$ -координаты. Рассмотрим первый элемент подробнее. Имеем

$$[N^{(1)}] = [L_1 \ L_2 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0].$$

Запишем произведение  $[N^{(1)}]^T [N^{(1)}]$ :

$$[N^{(1)}]^T [N^{(1)}] = \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & 0 & L_1 L_3 & 0 & 0 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & 0 & L_2 L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & 0 & L_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Интегрируя по площади с использованием формулы (3.43), получаем

$$[c^{(1)}] = \frac{A^{(1)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

(толщина элемента предполагается единичной).

Вектор-столбец для первого элемента имеет вид

$$\{r^{(1)}\} = \frac{A^{(1)} \bar{\sigma}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A^{(1)} \frac{(233)}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A^{(1)} \begin{bmatrix} 77,67 \\ 77,67 \\ 0 \\ 77,67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

В предыдущих расчетах использовалось сдвиговое напряжение  $\tau_{zy}$  только потому, что оно имеет наибольшее значение внутри каждого элемента. Сдвиговое напряжение  $\tau_{zx}$  может быть рассмотрено точно так же. Вектор-столбец  $\{R\}$  должен быть вновь вычислен с использованием числовых значений  $\tau_{zx}$ . Заметим, что вектор-столбец  $\{R\}$  составляется только для величины, изменяющейся от элемента к элементу. Итак, числовые матрицы элементов с первого по четвертый даются формулами (6.29) — (6.33).

$$[c^{(2)}] = \frac{A^{(2)}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{r^{(2)}\} = A^{(2)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 213 \\ 213 \\ 0 \\ 213 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

$$[c^{(3)}] = \frac{A^{(3)}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{r^{(3)}\} = A^{(3)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 164,67 \\ 0 \\ 164,67 \\ 164,67 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.32)$$

$$[c^{(4)}] = \frac{A^{(4)}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{r^{(4)}\} = A^{(4)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 164,67 \\ 164,67 \\ 164,67 \end{Bmatrix}. \quad (6.33)$$

Окончательная система уравнений получается суммированием уравнений для каждого элемента. В результате имеем

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 77,67 \\ 455,35 \\ 213 \\ 407,01 \\ 542,34 \\ 164,67 \end{Bmatrix}. \quad (6.34)$$

Так как все элементы имеют одинаковую площадь, то в последних формулах она опущена.

Узловые значения результата следующие:

$$\{\sigma\}^T = [70,9, 436,5, 724,1, 353,6, 671,4, 475,5].$$

Для результатов элемента можно, кроме того, получить соотношения, которые выражают изменение этих величин по площади элемента. Мы не будем останавливаться подробно на этом, поскольку такие соотношения широко не применяются.

Применение теории сопряженной аппроксимации сводится к решению системы алгебраических уравнений, порядок которой совпадает с порядком системы, используемой для получения узловых значений. Это представляет определенное неудобство при решении задач, которые требуют включения большого числа элементов.

Способ, не требующий решения полной системы уравнений, обсуждается в гл. 7, где рассматривается кручение квадратного стержня с большим числом элементов.

Последние этапы метода конечных элементов проиллюстрированы в этой главе на конкретной задаче. Было показано, как получаются матрицы элементов, а также как определяются результаты элемента, если известны узловые значения.

Следующая глава посвящена вопросам машинной реализации метода конечных элементов. В гл. 8—12 будут рассмотрены различные применения метода.

## Задачи

41. Проверьте матрицу жесткости и вектор нагрузки в уравнениях:

1) (6.19б), 2) (6.19в), 3) (6.19д).

42. Проверьте значения сдвиговых напряжений для элементов:

а) второго, б) третьего, в) четвертого для примера, рассмотренного в разд. 6.3.

43. Вычислите числовые значения  $\{R\}$ , необходимые для определения узловых значений  $\tau_{zx}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fung Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965, pp. 162—170.
2. Oden J. T., Brauchli H. J., On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Approximations, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 3, 317—325 (1971).
3. Timoshenko S. P., Goodier J. N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, N. Y., 1970, pp. 315—316; есть русский перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости, изд-во «Наука», М., 1975.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Owen D. R. J., Ziènkiewicz O. C., Torsion of Axi-Symmetric Solids of Variable Diameter — Including Acceleration Effects, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 195—212 (1974).  
 Yamada Y., Kawai T., Yoshemura N., Analysis of the Elastic-Plastic-Problems by the Matrix Displacement Method, Proc. of the Second Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics (AFFDL-TR-68-150), Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1968.

## Глава 7

### РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЭВМ

*Из результатов гл. 6 очевидно, что применение метода конечных элементов приводит к системе алгебраических уравнений. Порядок системы совпадает с общим числом неизвестных. Это число может быть порядка 10, 100, 1000, 10 000 или даже 100 000. Ясно, что для решения таких систем необходима вычислительная машина. Наше обсуждение метода конечных элементов будет неполным, если не рассмотреть машинную реализацию этой процедуры. В этой главе рассматриваются процедура составления системы уравнений, ее преобразование и решение. Здесь представлена общая блок-схема вычислений, в которой используются симплекс-элементы, и приводится полученное с помощью ЭВМ численное решение задачи о кручении, рассмотренной в гл. 6.*

#### 7.1. Прямое построение глобальной матрицы жесткости

Метод построения глобальной матрицы жесткости, представленный в предыдущей главе, весьма неэффективен при использовании цифровой вычислительной машины. Эта неэффективность объясняется тем, что матрица жесткости отдельного элемента  $[k^{(e)}]$  имеет такое же число строк и столбцов, что и глобальная матрица жесткости  $[K]$ . Как видно из формул (6.19), большинство коэффициентов в матрице элемента равно нулю. Предположим, что область разбита на 50 элементов с 75 узловыми точками и нужно построить матрицу элемента  $[k^{(e)}]$ . Матрица элемента должна содержать 75 строк и столбцов с общим числом коэффициентов  $75^2 = 5625$ . Из этих коэффициентов 5616 должны равняться нулю, так как для рассмотренной задачи о кручении матрица элемента содержит только девять ненулевых коэффициентов.

Дополнительные неудобства связаны с тем, что глобальная матрица жесткости  $[K]$  получается суммированием матриц жесткости элементов  $[k^{(e)}]$ ,  $[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$ . Матрица каждого элемента должна быть вычислена отдельно от  $[K]$  и затем прибавлена к последней, а это требует запоминания обеих матриц  $[K]$  и  $[k^{(e)}]$ . Необходимость помнить две большие матрицы приводит к пере-

грузке запоминающего устройства, когда решаемая задача имеет большое число неизвестных.

В эффективных программах процедура построения глобальной матрицы жесткости использует сокращенную форму матриц элементов  $[N^{(e)}]$  при получении уравнений для элемента. Такой метод известен как метод «прямой жесткости». Применение этого метода исключает необходимость хранения больших матриц элементов, содержащих всего несколько отличных от нуля коэффициентов. Процедура кодирования, которая описывается ниже, представлена в работе [4].

При использовании этого метода сначала рассматривается  $[N^{(e)}]$  для конкретного элемента. Все глобальные степени свободы  $\Phi$  (или  $u$  в случае векторных величин), которые не относятся к этому элементу, исключаются из рассмотрения. Функции формы записываются в соответствии с порядком следования индексов  $i, j, k$ , начиная с узла  $i$ , в направлении против часовой стрелки. Рассмотрим, например, элемент (3) на фиг. 6.3. Согласно формуле (6.9), для  $\Phi^{(3)}$  имеем

$$\Phi^{(3)} = 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6.$$

Этому элементу соответствуют узлы 2, 5 и 4 и глобальные степени свободы  $\Phi_2, \Phi_5$  и  $\Phi_4$ . После упорядочивания функций формы в направлении против часовой стрелки, начиная от узла  $i$ , последнее соотношение в сокращенном виде записывается как

$$\Phi^{(3)} = N_2^{(3)}\Phi_2 + N_5^{(3)}\Phi_5 + N_4^{(3)}\Phi_4. \quad (7.1)$$

Матрица градиентов имеет вид

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A^{(3)}} \begin{bmatrix} b_2^{(3)} & b_5^{(3)} & b_4^{(3)} \\ c_2^{(3)} & c_5^{(3)} & c_4^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = [B^{(3)}] \{\Phi^{(3)}\}. \quad (7.2)$$

Значения коэффициентов  $b_\beta^{(3)}$  и  $c_\beta^{(3)}$  могут быть вычислены по формулам (3.10), если заданы координаты узлов элемента. После подстановки этих значений в  $[B^{(3)}]$  соотношение (7.2) примет вид

$$\{g\} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}. \quad (7.3)$$

Подставляя  $[B^{(3)}]$  в сокращенной форме в равенство (6.8) и выполняя умножение и интегрирование, получаем

$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1,0 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Таким образом, в результате мы имеем матрицу размером  $3 \times 3$  вместо матрицы размером  $6 \times 6$ , данной в (6.19в). Матрица элемента имеет размер  $3 \times 3$ , потому что этому элементу соответствуют три глобальные степени свободы.

Применив подобную процедуру к интегралу

$$2G\theta \int_A [N^{(3)}]^T dA,$$

получим

$$\{f^{(3)}\} = \frac{2G\theta V^{(3)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.5)$$

С помощью формул (7.4) и (7.5) уравнения для данного элемента можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29,07 \\ 29,07 \\ 29,07 \end{Bmatrix}. \quad (7.6)$$

Уравнения (7.6), очевидно, не идентичны уравнениям (6.19в). Чтобы полученная матрица соответствовала точной матрице жесткости третьего элемента, ее нужно переформировать и расширить. Алгоритм переформирования и расширения матрицы несложен.

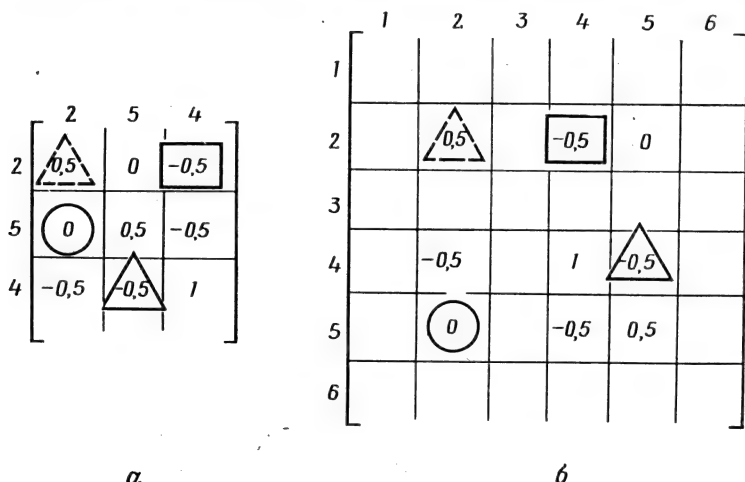
Строкам и столбцам сокращенной матрицы элемента приписываются номера глобальных степеней свободы. Порядок расположения степеней свободы соответствует обходу элемента против часовой стрелки, начиная от  $i$ -го узла.

Матрицы элементов в задаче о кручении имеют только одну степень свободы (искомую величину) в каждом узле, поэтому функции формы в (7.1) упорядочены так же, как и глобальные степени свободы. Используя указанную нумерацию для строк и столбцов матрицы (7.4), запишем

$$[k^{(3)}] = 5 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 4 \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Приписывание столбцам и строкам матрицы элемента номеров глобальных степеней свободы позволяет определить, какое место займут коэффициенты матрицы элемента в глобальной матрице жесткости. Например, коэффициент  $-1/2$ , заключенный в квадрат матрицы (7.7), находится на пересечении второй строки и четвер-

того столбца глобальной матрицы жесткости. Коэффициент  $-1/2$ , заключенный в треугольник, находится на пересечении четвертой строки и пятого столбца. Расположение всех коэффициентов матрицы элемента в глобальной матрице жесткости показано на



Фиг. 7.1. Расширение и переформирование сокращенной матрицы жесткости элемента.

*a* — сокращенная матрица; *б* — расширенная и переформированная матрица.

фиг. 7.1. Незаполненные прямоугольники для  $[k^{(3)}]$  соответствуют нулевым элементам. Сопоставление фиг. 7.1 и соотношения (6.19в) показывает, что мы имеем теперь точную матрицу жесткости данного элемента.

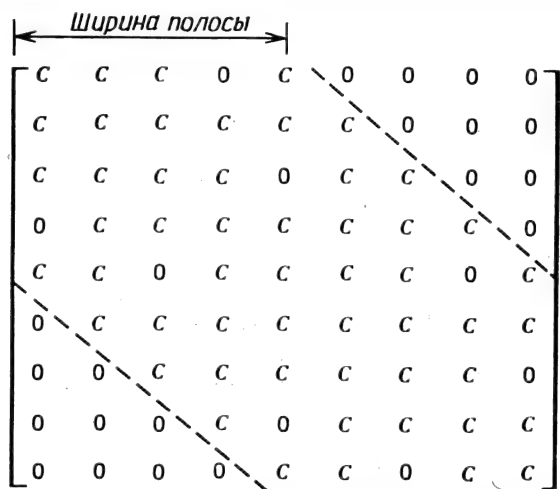
Метод прямой жесткости построения глобальной матрицы жесткости является очень важным алгоритмом реализации метода конечных элементов на ЭВМ, потому что он значительно сокращает загрузку запоминающего устройства. В частности, он исключает необходимость запоминания больших матриц элементов, которые содержат всего несколько ненулевых коэффициентов. Число строк и число столбцов сокращенной матрицы жесткости элемента равны числу степеней свободы элемента.

## 7.2. Система линейных уравнений

При использовании метода конечных элементов получается система линейных уравнений, которая должна быть решена относительно неизвестных узловых параметров. Решение этих уравнений является очень важным аспектом задачи в целом, потому что си-

стема уравнений обычно очень большая. Методы решения систем с малым или большим числом уравнений мало отличаются друг от друга. Реализация этих методов, однако, зависит от технических возможностей ЭВМ.

Во второй главе, где рассматривался процесс дискретизации сплошной среды, было отмечено, что путем надлежащей нумерации узлов можно контролировать расположение коэффициентов в



Фиг. 7.2. Общий вид системы уравнений, получаемой при использовании метода конечных элементов.

глобальной матрице жесткости. Напомним, что при разумной нумерации узлов получается матрица ленточного типа вместо полной матрицы. Ленточная матрица характеризуется тем, что все ее ненулевые коэффициенты располагаются вблизи главной диагонали, а все коэффициенты за пределами некоторой полосы, ограниченной линиями, параллельными главной диагонали, равны нулю. Схематически это проиллюстрировано на фиг. 7.2, где ширина полосы ленточной матрицы показана штриховыми линиями. Через  $C$  обозначены ненулевые члены. Вообще говоря, нулевые коэффициенты могут встречаться и внутри полосы.

Два свойства результирующей системы уравнений делают ее идеальной: симметрия и положительная определенность матрицы. Наличие симметрии означает, что приблизительно половину ненулевых членов матрицы можно не запоминать. Положительная определенность означает, что коэффициент, стоящий на главной диагонали, всегда положителен и обычно много больше по вели-

чине, чем любой другой коэффициент соответствующей строки или столбца.

В случае симметричной положительно определенной матрицы ленточного типа значительно сокращается объем вычислений, необходимых для получения решения системы уравнений. К тому же уменьшается вероятность больших ошибок округления.

Существование симметрии в матрице ленточного типа позволяет значительно сократить объем памяти, требуемой для хранения глобальной матрицы. Обычно при программировании предусматривается превращение матрицы, изображенной на фиг. 7.2, в прямоугольный массив, ширина которого совпадает с шириной полосы матрицы, а длина равна числу уравнений. Чтобы проиллюстрировать преимущество такого представления матрицы, допустим, что мы решаем задачу, которая включает 200 узловых неизвестных. Обычно при этом получается глобальная матрица жесткости, для хранения которой требуется  $200 \times 200$ , т. е. 40 000 единиц машинной памяти. Однако, если эта ленточная матрица имеет ширину полосы, равную 40, и хранится в виде прямоугольного массива, требуется уже только 8000 единиц машинной памяти для запоминания 40 столбцов по 200 элементов в каждом. Таким образом, загрузка машинной памяти сокращается на 20% по сравнению с загрузкой, требуемой при хранении квадратной матрицы.

Решение системы уравнений может быть проведено с помощью алгоритмов, которые обсуждаются во многих книгах, посвященных численному анализу. Следует подчеркнуть, что обращение матрицы — очень неэффективная процедура решения системы уравнений. Эта неэффективность может быть объяснена двумя причинами. Обращение матрицы эквивалентно решению системы  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными. Если при этом рассматривается ограниченное число столбцов правых частей (глобальный вектор нагрузки), то вычисление обратной матрицы мало оправдано. Кроме того, в результате обращения ленточной матрицы получается матрица неленточного типа. Процедура обращения матрицы неэффективна также еще и с точки зрения экономии машинной памяти.

### 7.2.1. Преобразование системы уравнений

Результирующая система уравнений имеет вид

$$[K] \{\Phi\} = \{F\}; \quad (7.8)$$

она получается суммированием уравнений для всех элементов. Эта система должна быть преобразована, если некоторые составляющие  $\{\Phi\}$  известны, что является скорее правилом, чем исключением. В большинстве задач теории поля некоторые граничные значения искомой величины заданы; во всех задачах теории упругости должны быть фиксированы некоторые перемещения с тем, чтобы

исключить перемещение среды как жесткого тела. В задачах механики деформируемых сред матрица жесткости  $[K]$  будет сингулярной до тех пор, пока не заданы некоторые перемещения.

Цель этого раздела — обсуждение и иллюстрация процедуры преобразования  $[K]$  и  $\{F\}$  таким образом, чтобы получить правильный ответ, не изменяя размеры  $[K]$  и  $\{F\}$ , ибо это повлечет за собой трудности при программировании.

Если фиксирована одна степень свободы узлового параметра  $\{\Phi\}$ , то преобразование системы уравнений представляет собой двухшаговую процедуру. Пусть, например, известно значение  $\Phi_5$ ; преобразование сводится тогда к следующему:

1. Все коэффициенты пятой строки, за исключением диагональных, приравняются нулю. Диагональный член остается неизменным. В форме равенства это выглядит как  $K_{5j}=0$  при  $j=1, \dots, n$  и  $j \neq 5$ . Соответствующая компонента  $F_5$  вектора  $\{F\}$  заменяется на произведение

$$K_{55}\Phi_5.$$

2. Все остальные уравнения преобразуются вычитанием произведения

$$K_{j5}\Phi_5$$

из  $F_j$  и подстановкой  $K_{j5}=0$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $j \neq 5$ .

## Пример

44. Требуется преобразовать следующую систему уравнений, если известно, что  $\Phi_1=150$  и  $\Phi_5=40$ :

$$\begin{aligned} 55\Phi_1 - 46\Phi_2 + 4\Phi_3 &= 500, \\ -46\Phi_1 + 140\Phi_2 - 46\Phi_3 &= 2000, \\ 4\Phi_1 - 46\Phi_2 + 110\Phi_3 - 46\Phi_4 + 4\Phi_5 &= 1000, \\ -46\Phi_3 + 142\Phi_4 - 46\Phi_5 &= 2000, \\ 4\Phi_3 - 46\Phi_4 + 65\Phi_5 &= 900. \end{aligned}$$

На первом этапе приравняем нулю все коэффициенты в первой и пятой строках, за исключением диагональных членов, которые оставим неизменными. Компоненты  $F_1$  и  $F_5$  в  $\{F\}$  заменим соответственно на  $K_{11}\Phi_1$  и  $K_{55}\Phi_5$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} 55\Phi_1 &= 8250, \\ -46\Phi_1 + 140\Phi_2 - 46\Phi_3 &= 2000, \\ 4\Phi_1 - 46\Phi_2 + 110\Phi_3 - 46\Phi_4 + 4\Phi_5 &= 1000, \\ -46\Phi_3 + 142\Phi_4 - 46\Phi_5 &= 2000, \\ 65\Phi_5 &= 2600. \end{aligned}$$

Второй этап состоит в исключении столбцов матрицы, коэффициенты которых умножаются на  $\Phi_1$  и  $\Phi_5$ . Это осуществляется переносом членов, содержащих  $\Phi_1$  и  $\Phi_5$ , в правую часть системы. Например, величина  $F_2$  становится равной  $2000 + 46\Phi_1$ , или 8900. Завершая второй шаг, получим

$$\begin{aligned} 55\Phi_1 &= 8250, \\ 140\Phi_2 - 46\Phi_3 &= 8900, \\ -46\Phi_2 + 110\Phi_3 - 46\Phi_4 &= 240, \\ -46\Phi_3 + 142\Phi_4 &= 3840, \\ 65\Phi_5 &= 2600. \end{aligned}$$

Описанная выше процедура совершенно проста и легко поддается программированию. Та же методика преобразования может быть использована также в случае, когда  $[K]$  хранится в виде прямоугольного массива. Логика программирования, однако, при этом более сложная.

Другой метод, применяемый некоторыми исследователями, состоит в том, что диагональный коэффициент, соответствующий заданному узловому значению  $\Phi_\beta$ , умножается на очень большое число, скажем на  $10^{15}$ , а  $F_\beta$  заменяется на  $(10^{15}) \Phi_\beta$ . Это равносильно приближенной замене коэффициентов вне главной диагонали нулями. Такой способ очень легко реализовать на ЭВМ, но он неприменим, если заданное значение  $\Phi_\beta$  очень мало. Именно с таким случаем сталкиваются при решении задач механики твердого деформируемого тела, когда заданные перемещения малы по величине. Первый метод, рассмотренный выше, всегда будет давать правильные результаты там, где мы сталкиваемся с малыми заданными величинами  $\Phi_\beta$ .

### 7.2.2. Решение системы уравнений

Одним из наиболее эффективных методов решения системы уравнений, которые получаются при использовании метода конечных элементов, является известный вариант метода исключения Гаусса [1]. Матрица системы преобразуется к треугольному виду, после чего решение получается обратной прогонкой. Проиллюстрируем сначала метод на примере решения простой системы уравнений, а затем проведем обобщение, обсуждая вопросы, которые имеют отношение к методу конечных элементов.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 &= 6, \\ 2\Phi_1 + 6\Phi_2 - \Phi_3 &= 4, \\ \Phi_1 - \Phi_2 + 4\Phi_3 &= 2. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Матрица этой системы симметрична, причем наибольшие ее коэффициенты расположены на главной диагонали. Метод исключения основан на том, что любая неизвестная может быть исключена из всех уравнений, следующих за тем, в котором эта неизвестная находится на главной диагонали. Например, неизвестную  $\Phi_1$  можно исключить из второго и третьего уравнений, а затем исключить  $\Phi_2$  из третьего уравнения. Чтобы исключить  $\Phi_1$  из второго и третьего уравнений, решим первое уравнение относительно  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1 = 0,75 - 0,25\Phi_2 - 0,125\Phi_3.$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$2(0,75 - 0,25\Phi_2 - 0,125\Phi_3) + 6\Phi_2 - \Phi_3 = 4,$$

или

$$5,5\Phi_2 - 1,25\Phi_3 = 2,5.$$

Подстановка в третье уравнение дает

$$(0,75 - 0,25\Phi_2 - 0,125\Phi_3) - \Phi_2 + 4\Phi_3 = 2,$$

или

$$-1,25\Phi_2 + 3,875\Phi_3 = 1,25.$$

В результате система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 &= 6, \\ 5,5\Phi_2 - 1,25\Phi_3 &= 2,5, \\ -1,25\Phi_2 + 3,875\Phi_3 &= 1,25. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Повторим процедуру, исключая  $\Phi_2$  из третьего уравнения:

$$\begin{aligned} 8\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3 &= 6, \\ 5,5\Phi_2 - 1,25\Phi_3 &= 2,5, \\ 3,591\Phi_3 &= 1,818. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Эта система может быть решена обратной прогонкой. Из третьего уравнения получаем

$$\Phi_3 = \frac{1,818}{3,591} = 0,506.$$

Подставляя это значение  $\Phi_3$  во второе уравнение, и решая его относительно  $\Phi_2$ , получаем

$$\Phi_2 = \frac{2,5 + 1,25\Phi_3}{5,5} = 0,5695.$$

Поскольку  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  известны, из первого уравнения имеем

$$\Phi_1 = 0,544.$$

Мы видим, что метод включает два этапа. Первый состоит в превращении исходной матрицы в треугольную. На втором этапе

решается полученная система уравнений. Первый этап обычно называют разложением матрицы, поскольку матрица жесткости переходит в более простую матрицу. Второй этап решения называют обратной прогонкой.

После того как мы подробно познакомились с методом, рассмотрим систему уравнений более общего вида. Снова предположим, что система уравнений симметрична и доминирующие члены находятся на главной диагонали. Кроме того, допустим, что матрица системы ленточного типа. Имея это в виду, рассмотрим приведенную ниже систему уравнений:

$$\begin{aligned} K_{11}\Phi_1 + K_{12}\Phi_2 + K_{13}\Phi_3 &= F_1, \\ K_{21}\Phi_1 + K_{22}\Phi_2 + K_{23}\Phi_3 + K_{24}\Phi_4 &= F_2, \\ K_{31}\Phi_1 + K_{32}\Phi_2 + K_{33}\Phi_3 + K_{34}\Phi_4 + K_{35}\Phi_5 &= F_3, \\ K_{42}\Phi_2 + K_{43}\Phi_3 + K_{44}\Phi_4 + K_{45}\Phi_5 &= F_4, \\ K_{53}\Phi_3 + K_{54}\Phi_4 + K_{55}\Phi_5 &= F_5. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ширина полосы матрицы, очевидно, равна трем. Нулевые коэффициенты здесь не показаны. После исключения  $\Phi_1$  имеем

$$\begin{bmatrix} -K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & F_1 \\ 0 & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & F_2^{(1)} \\ 0 & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & F_3^{(1)} \\ 0 & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & F_4^{(1)} \\ 0 & 0 & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & F_5^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

где коэффициенты расширенной <sup>1)</sup> матрицы выражаются через исходные коэффициенты следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{22}^{(1)} &= K_{22} - K_{21} \frac{K_{12}}{K_{11}}, & K_{23}^{(1)} &= K_{23} - K_{21} \frac{K_{13}}{K_{11}}, \\ K_{32}^{(1)} &= K_{32} - K_{31} \frac{K_{12}}{K_{11}}, & K_{33}^{(1)} &= K_{33} - K_{31} \frac{K_{13}}{K_{11}}, \\ F_2^{(1)} &= F_2 - K_{21} \frac{F_1}{K_{11}}, & F_3^{(1)} &= F_3 - K_{31} \frac{F_1}{K_{11}}. \end{aligned}$$

Верхний индекс (1) используется для обозначения первого исключения, или редукции. Общее соотношение для произвольного коэффициента после первой редукции имеет вид

$$K_{ij}^{(1)} = K_{ij} - K_{i1} \frac{K_{1j}}{K_{11}}, \quad i, j > 1.$$

<sup>1)</sup> Расширенная матрица для системы уравнений  $[K]\{\Phi\} = \{F\}$  получается присоединением к матрице  $[K]$  вектор-столбца  $\{F\}$  [1].

Редукции с номером  $n$  соответствует общее соотношение вида

$$K_{ij}^{(n)} = K_{ij}^{(n-1)} - K_{in}^{(n-1)} \frac{K_{nj}^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}, \quad i, j > n. \quad (7.14)$$

Аналогичные формулы получаются для вектор-столбца  $\{F\}$ :

$$F_i^{(1)} = F_i - K_{i1} \frac{F_1}{K_{11}}, \quad i > 1,$$

и

$$F_i^{(n)} = F_i^{(n-1)} - K_{in}^{(n-1)} \frac{F_n^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}, \quad i > n. \quad (7.15)$$

Из соотношения (7.14) можно извлечь важную информацию. Прежде всего очевидно, что симметрия в коэффициентах после операции исключения сохраняется. Это легко увидеть, сравнивая, например, коэффициенты  $K_{23}^{(1)}$  и  $K_{32}^{(1)}$  в матрице (7.13). Так как в исходной матрице  $K_{21} = K_{12}$  и  $K_{13} = K_{31}$ , из вышеприведенных формул следует, что  $K_{23}^{(1)} = K_{32}^{(1)}$ . Поскольку симметрия сохраняется после каждой редукции, то  $K_{ni}^{(n-1)} = K_{in}^{(n-1)}$  и матрица (7.11) может быть переписана в виде

$$K_{ij}^{(n)} = K_{ij}^{(n-1)} - K_{ni}^{(n-1)} \frac{K_{nj}^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}}. \quad (7.16)$$

Разложение матрицы таким образом может быть проведено с использованием только коэффициентов, находящихся на главной диагонали и выше ее, так что нет необходимости запоминать полную матрицу.

Еще одну важную особенность можно обнаружить при рассмотрении матрицы (7.13): если  $K_{in}^{(n-1)}$  или  $K_{nj}^{(n-1)}$  равно нулю, то  $K_{ij}^{(n)} = K_{ij}^{(n-1)}$ . Например, коэффициенты в четвертом и пятом столбцах и в четвертой и пятой строках матрицы (7.13) не изменились после операции исключения, потому что  $K_{14} = K_{41} = 0$  и  $K_{15} = K_{51} = 0$ . На каждом шаге исключения следует рассматривать только те коэффициенты в пределах ширины полосы, которые изменяются в процессе исключения. Если система из 100 уравнений имеет матрицу с шириной полосы 15, только 15 уравнений этой системы видоизменяются после каждого отдельного исключения. Это приводит к экономии машинного времени при рассмотрении систем уравнений большого порядка.

Элементы матрицы, находящиеся вне полосы, не влияют на процесс исключения (ибо они равны нулю). Следовательно, их помнить не нужно. Это обстоятельство позволяет хранить глобальную матрицу жесткости в виде прямоугольного массива шириной, равной ширине полосы матрицы.

Получающиеся после разложения коэффициенты  $K_{ij}$  содержат достаточно информации, чтобы преобразовать надлежащим образом произвольный вектор-столбец, даже если это не было сделано в процессе разложения матрицы. Последнее обстоятельство позволяет анализировать многочисленные вектор-столбцы  $\{F\}$  и дает определенное преимущество этому методу перед другими процедурами, которые применяются при рассмотрении отдельного вектор-столбца. Если  $\{F\}$  не модифицируется вместе с  $[K]$ , рассматриваемый метод сводится к следующей трехшаговой процедуре:

1. Матрица коэффициентов  $[K]$  преобразуется в верхнюю треугольную матрицу.

2. Вектор-столбец  $\{F\}$  модифицируется обращением  $n$  раз к формуле (7.15). Этот процесс называют прямым разложением.

3. Решение получается методом обратной прогонки.

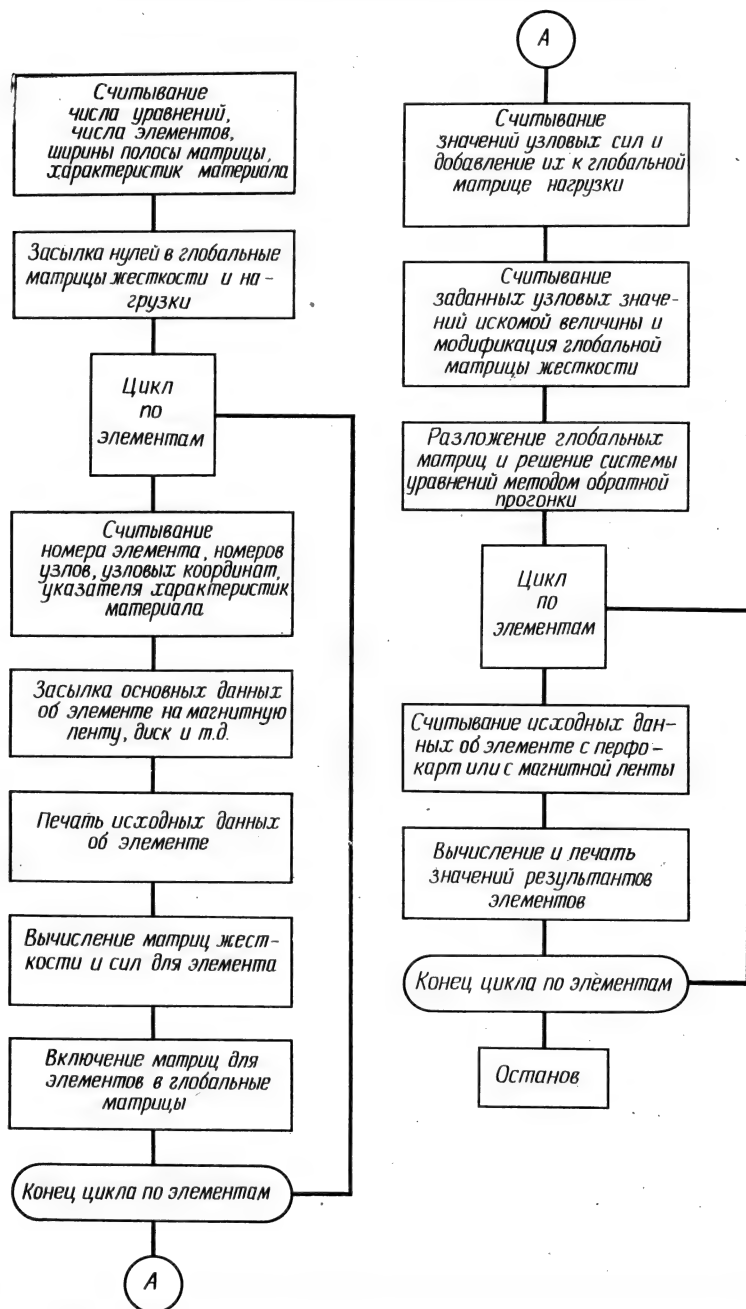
Первый шаг обычно реализуется в одной подпрограмме, тогда как второй и третий шаги объединяются в другой подпрограмме. В гл. 18 представлены подпрограммы, которые выполняют все эти действия для матрицы, хранящейся в виде прямоугольного массива.

### 7.3. Общая блок-схема вычислений

Одним из преимуществ метода конечных элементов является то, что многие его этапы являются общими для всех областей приложения метода. Процедура решения задач переноса тепла и течения грунтовых вод включает много тех же шагов, которые встречаются при расчете жестких рам и ферм и при анализе напряженного и деформированного состояний деформируемой сплошной среды. Общая блок-схема вычислений представлена на фиг. 7.3. Эта блок-схема предназначена для симплекс-элементов и пригодна для всех областей применения, обсуждаемых в следующих пяти главах. Блок-схема неприменима в случае изопараметрических элементов, которые будут изучены позже в этой книге. Работа основных блоков схемы будет рассмотрена в общем случае, а не в связи с каким-то специальным примером.

Все программы, реализующие метод конечных элементов, должны содержать предварительную информацию о числе уравнений, числе элементов и ширине полосы матрицы. Сведения о числе уравнений необходимы для того, чтобы в исходном состоянии глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузки можно было заполнить нулями (предварительная чистка матриц), поскольку в процессе счета эти матрицы составляются путем суммирования.

Сразу после чистки матриц следует циклическая операция, выполняемая для каждого элемента. Эта операция включает ввод исходной информации об элементе, составление матриц элементов



Фиг. 7.3. Общая блок-схема программы, реализующей метод конечных элементов.

и включение их в глобальные матрицы. Конкретная информация об элементе включает в себя номер элемента и номера узлов. Сюда могут быть отнесены значения координат узлов элемента. Последние могут быть введены независимо и вызываться из машинной памяти с помощью номеров узлов элемента. Если используется последняя процедура, все узловые координаты должны быть введены перед началом работы цикла.

Вся важная информация об элементе должна быть выведена на печать где-либо внутри указанного цикла. Вывод исходных данных на печать позволяет убедиться, что эти данные правильно отперфорированы и введены в нужном порядке. Неверная исходная информация об элементе — главный источник ошибки в программах, реализующих метод конечных элементов.

Задание номеров узлов предпочтительнее задания узловых степеней свободы. Узловые степени свободы могут быть рассчитаны, если известны номера узлов. В задачах, связанных с рассмотрением векторных величин, ввод номеров узлов может сократить на половину или на две трети требуемую информацию об узловых данных.

Составление матриц элементов требует знания свойств материала. Существуют три способа обработки данных об этих свойствах. Если данные о свойствах материала не зависят от номера элемента, они могут быть введены одновременно с предварительной информацией. Именно так делается в программах, представленных в гл. 18, потому что эти программы носят учебный, а не исследовательский характер. Их используют в основном не для решения сложных задач, а для иллюстрации применения метода конечных элементов. При другом способе обработки данных о свойствах материала эти данные вводятся и запоминаются как массив перед началом работы цикла. Тогда номер соответствующего материала должен быть представлен в исходных данных элемента. При использовании третьего способа вводится группа свойств материала, которой пользуются для всех элементов до тех пор, пока некоторое контрольное целое число в исходных данных элемента не укажет, что пора вводить другую группу свойств.

Количество исходных данных элемента (таких, как номера узлов, узловые координаты и свойства материала), которые хранятся в ЭВМ, зависит от используемой программы и от размеров памяти ЭВМ. Стоит придерживаться правила — не хранить исходную информацию об элементе, когда размеры памяти ЭВМ ограничены. Эта память в большей степени необходима для хранения глобальных матриц. Одним из средств хранения информации является внешнее запоминающее устройство, такое, как магнитная лента. Если же внешним устройством воспользоваться нельзя, данные об элементе стираются и вводятся вновь, когда подсчитываются результаты элемента.

Ввод узловых сил, если вообще это требуется, и составление глобального вектора нагрузки  $\{F\}$  осуществляются после завершения указанного выше цикла по элементам. Вектор узловых сил содержит величины, которые связаны с определенным узлом, а не с определенным элементом. Вообще большинство из этих величин связано с граничными узлами, как, например, сосредоточенные силы в задачах механики деформируемых сред, или псевдосилы, такие, как количество просочившейся воды в задаче о течении грунтовых вод или количество потерь тепла в задаче о переносе тепла. Силы будут определены для различных типов задач в прикладных областях. Величины и расположение этих сил будут заданы при решении конкретной задачи.

Число узловых сил различно в разных задачах, поэтому необходимо обеспечить своевременное прекращение ввода. Обычно это достигается использованием нулевого или отрицательного номера узла для размещения узловой силы.

После ввода узловых сил производится ввод заданных узловых значений искомой величины. Поскольку число их может быть произвольным, завершение ввода снова осуществляется с помощью нулевого или отрицательного номера узла. Необходимая модификация системы уравнений выполняется так, как описано в предыдущей главе.

После преобразования системы уравнений проводится решение этих уравнений относительно неизвестных узловых значений. Существует несколько процедур построения решения. Одна из них уже обсуждалась в середине этой главы. Система уравнений имеет специальный вид: ее матрица ленточная, причем диагональные элементы обычно положительны и доминируют над элементами соответствующих столбцов и строк вне главной диагонали. Это позволяет многие достаточно общие процедуры решения видоизменить так, чтобы повысить их эффективность.

После решения системы уравнений осуществляется вывод узловых значений. Если результаты элементов не вычисляются, то этот этап завершающий.

Для вычисления результатов элементов требуется еще один цикл по элементам. В этом цикле снова вводятся исходные данные элемента, вычисляются результаты элемента и все другие важные величины, связанные с элементом. Если информация об элементе не хранится во внешнем периферийном устройстве, то использование операторов считывания, идентичных тем, которые применяются при первоначальном вводе данных, обладает определенным достоинством. Это позволяет применять тот же самый набор исходных данных для расчета результатов элемента. Можно также включить в программу операторы сравнения, которые будут сравнивать вычисленные значения с максимальными или минимальными значениями для предыдущих элементов и оставлять наименьшее или наибольшее значение вместе с номером элемента.

Вывод на печать информации этого типа производится после рассмотрения всех элементов.

Эффективная программа не рассматривает глобальную матрицу жесткости, глобальный вектор нагрузки и вектор решения как отдельные массивы, размеры которых заданы заранее, а хранит все эти величины в общем одномерном массиве в виде столбца [3].

Концепция одномерного массива может быть проиллюстрирована при рассмотрении системы уравнений, которая используется для получения согласованных результатов элемента четырехэлементной модели в задаче о кручении из гл. 6. Запишем эту систему уравнений (6.34):

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 932 \\ 5464 \\ 2556 \\ 4884 \\ 6508 \\ 1976 \end{Bmatrix}. \quad (7.17)$$

Обычно запоминание этой системы уравнений требует 48 ячеек машинной памяти — 36 для  $[K]$  и по 6 для  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$ . В соответствии с нумерацией узлов, показанной на фиг. 6.3, система уравнений будет иметь ширину полосы, равную четырем. Матрица жесткости может быть представлена четырьмя столбцами:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & x \\ 6 & 1 & x & x \\ 2 & x & x & x \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Через  $x$  обозначены несуществующие числа, которые обычно заменяются в ЭВМ нулями (в результате предварительной чистки). Заметим, что первый столбец соответствует членам главной диагонали, второй столбец заполнен коэффициентами диагонали, следующей за главной, и т. д.

При использовании одномерного массива вначале помещаются узловые значения  $\{\Phi_1\}$ , затем следует глобальный вектор нагрузки  $\{F\}$  и далее располагается матрица жесткости столбец за столбцом. Такое хранение матрицы (7.18) вместе с  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$  показано на фиг. 7.4. Порядковые номера расположения первых коэффициентов  $\{\Phi_1\}$ ,  $\{F\}$  и  $\{K\}$  в этом столбце называются указателями. Значение указателя для первого столбца матрицы жесткости на

единицу больше удвоенного числа уравнений. Это значение равно 13 в примере, представленном на фиг. 7.4.

Основной причиной использования одномерного массива является то, что его размер может быть установлен при выполнении программы. При этом исключаются ошибки, связанные с определением размеров массивов, и кроме того, место, отводимое в памяти машины для хранения матрицы жесткости, может быть освобождено для других целей, как только система уравнений будет решена.

Подготовка исходных данных требует от программиста большого внимания. Наиболее часто неправильная работа программы объясняется ошибками в исходных данных. Прежде чем отправлять исходные данные в вычислительную машину, необходимо каким-либо способом убедиться в их правильности. Для этого существует несколько способов: одни из них очень простые, другие — более сложные.

Простейший метод проверки данных — записать их в виде списка и сравнить с исходной схемой, чтобы убедиться, что размеры элементов и номера узлов записаны правильно. Кроме этого, всегда необходимо проверять правильность расположения чисел в столбцах, потому что сдвиг в столбце может привести к ошибочному ответу. Такая процедура проверки данных все же наименее желательна, так как человек, составляющий список, легко может ошибиться. В качестве промежуточного шага можно использовать программу, которая содержит те же операторы ввода и записи исходных данных, что и программа, реализующая метод конечных элементов, но которая не выполняет никаких вычислений. Программа такого типа позволит вводить данные в ЭВМ, которая будет считывать и записывать данные. Любые неверно составленные столбцы чисел будут обнаружены при напечатании. Программа будет также обнаруживать ошибки в расположении пер-

$\Phi_1$	
$\Phi_2$	
$\Phi_3$	
$\Phi_4$	
$\Phi_5$	
$\Phi_6$	
<hr/>	
	932
	5464
	2556
	4884
	6508
<hr/>	
	1976
<hr/>	
	2
	6
	2
	6
	6
	2
<hr/>	
	1
	1
	0
	2
	1
	x
<hr/>	
	0
	2
	1
	1
	x
	x
<hr/>	
	1
	2
	0
	x
	x
	x

Фиг. 7.4. Система уравнений, которая хранится в виде вектор-столбца.

фокарт. Удобнее проверять исходные данные, если ввести их в программу, которая затем представляет диаграмму всей анализируемой области в целом. Такой метод позволит очень быстро обнаружить элементы с неверными номерами узлов или ошибочными координатами, так как их графическое изображение будет накладываться на изображение других элементов. Наиболее совершенный метод обработки исходных данных — использовать генератор данных элемента. Это программа, которая размещает и нумерует узлы, вычисляет координаты узлов и затем разбивает область на элементы. Программы этого типа обычно приспособлены к определенным областям применения, потому что исходные данные могут существенно различаться при переходе от одной области применения к другой. Если говорить более подробно, данные, которые вводятся в программу, составленную для решения задачи о кручении бруса, будут сильно отличаться от исходных данных, которые вводятся в программу, связанную с задачей переноса тепла, если даже обе программы основаны на одной и той же системе уравнений. Мой собственный опыт показывает, что трудно написать набор программ, способных генерировать все исходные данные для задач переноса тепла, в которых конвекция происходит только на некоторых граничных элементах. В гл. 18 представлена программа, генерирующая исходные данные элемента.

#### **7.4. Решение задачи о кручении бруса с помощью вычислительной машины**

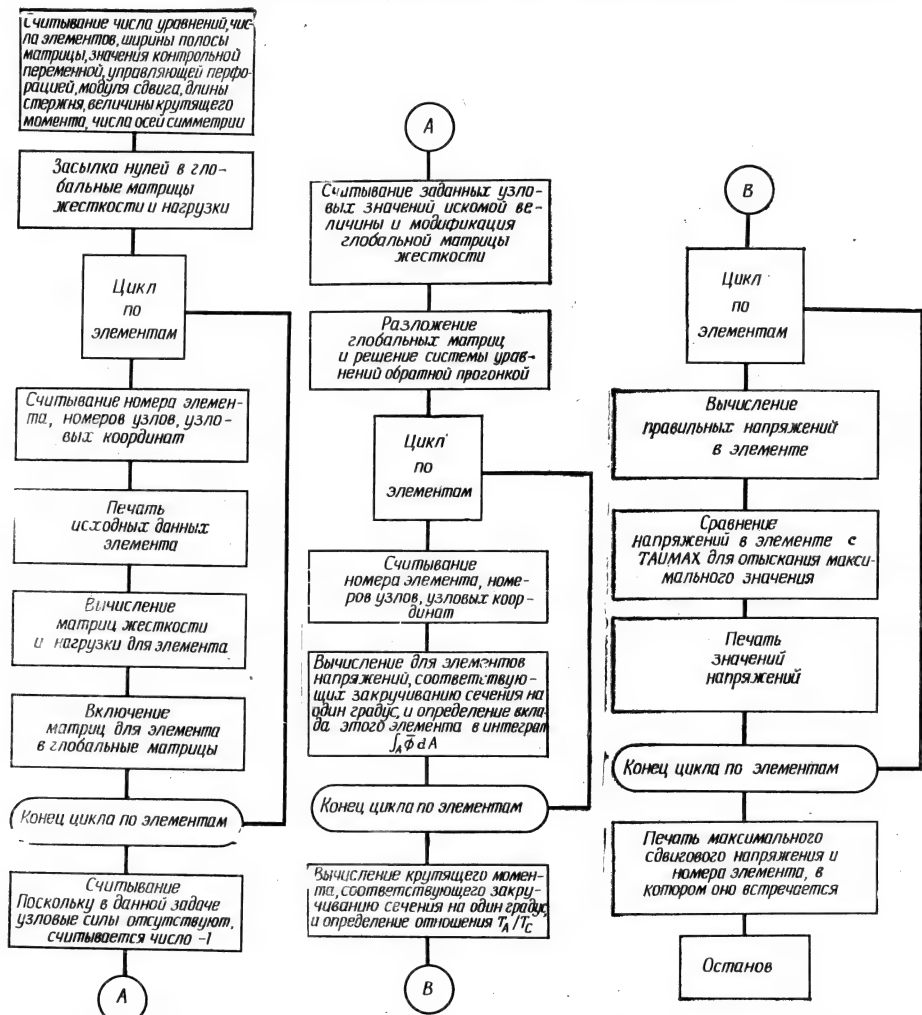
Блок-схема вычислений, представленная на фиг. 7.3, составлена не для какой-либо определенной задачи, а дает общую схему реализации метода конечных элементов. При рассмотрении конкретных областей применения должны быть введены незначительные изменения. Мы будем комментировать эти модификации в конце каждой главы прикладного характера. Начнем с нескольких замечаний о машинной реализации задачи о кручении, рассмотренной в гл. 6. Реализация этой задачи на ЭВМ отличается от общей блок-схемы на фиг. 7.3, потому что внешняя нагрузка — крутящий момент — не входит в расчетные формулы до тех пор, пока не определены узловые значения. С другой стороны, приложенный крутящий момент обычно при расчете конструкции известен и требуется определить максимальное сдвиговое напряжение, вызываемое этим моментом.

Одна из процедур получения правильных значений сдвиговых напряжений состоит в следующем. Задача решается в предположении, что торцевые сечения повернутся относительно друг друга на единичный угол закручивания. Это эквивалентно следующей ве-

личине угла закручивания на единицу длины:

$$\frac{\theta}{L} = \frac{2\pi}{360} \left( \frac{1}{L} \right) \text{ рад/м.}$$

Вычисляются крутящий момент, который вызовет такое закручивание стержня, и соответствующие ему напряжения в элементах.



Фиг. 7.5. Блок-схема программы решения задачи о кручении стержня.

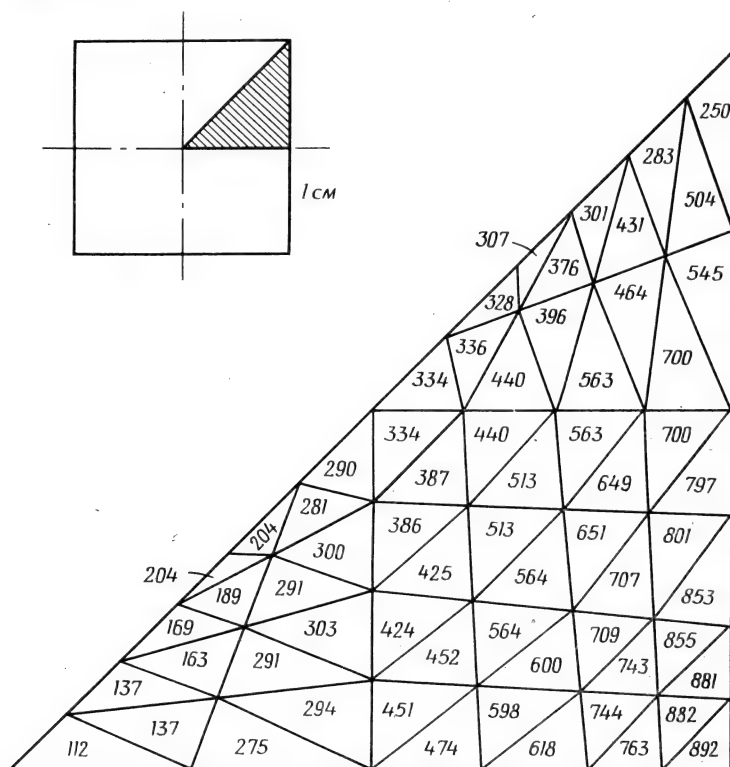
Истинные значения напряжений могут быть определены по формуле

$$\tau_{ис1} = \frac{T_{исг}}{T_{расч}} \tau_{расч}, \quad (7.19)$$

где  $T_{\text{ист}}$  — заданная величина крутящего момента,  $T_{\text{расч}}$ ,  $\tau_{\text{расч}}$  — расчетные величины крутящего момента и сдвигового напряжения, соответствующие единичному углу закручивания. Истинное значение угла закручивания равно

$$\theta_{\text{ист}} = \frac{T_{\text{ист}}}{T_{\text{расч}}},$$

так как первоначальная величина угла закручивания предполагалась единичной.

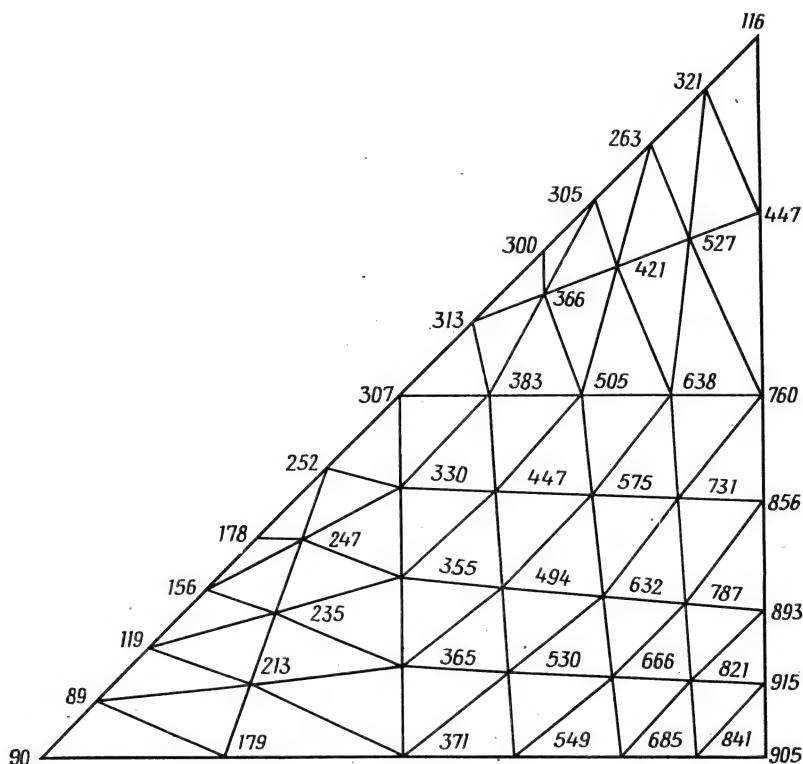


Фиг. 7.6. Значения  $\tau_{yz}$  в задаче о кручении стержня квадратного сечения, вычисленные для модели из 64 элементов.

Описанная выше процедура решения требует запоминания всех величин, которые зависят от отношения  $T_{\text{ист}}/T_{\text{расч}}$ . Масштабирование величин в соответствии с формулой (7.19) производится после завершения последнего этапа работы программы, изображенной на фиг. 7.3. Блок-схема программы для задачи о кручении представлена на фиг. 7.5. Заметим, что вывод узловых значений также

отодвинут на более поздний этап работы программ, ибо эти значения тоже должны быть умножены на отношение  $T_{\text{ист}}/T_{\text{расч}}$ .

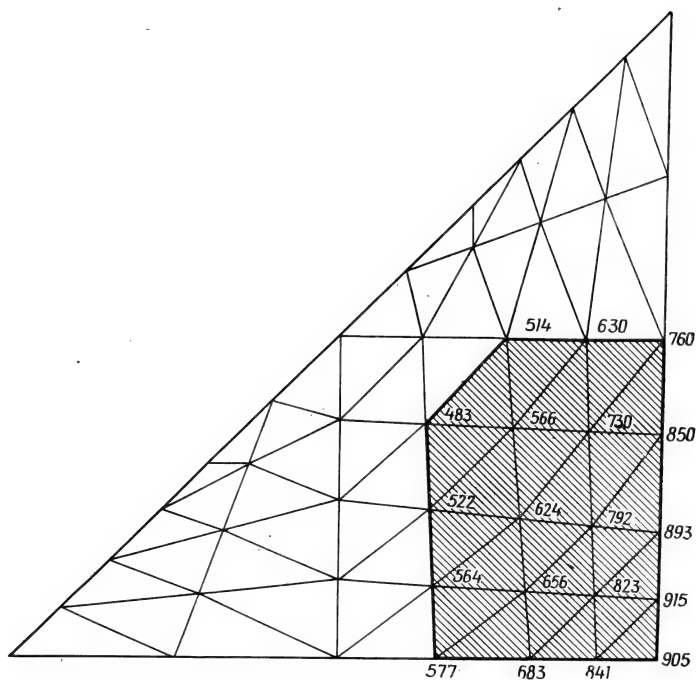
В гл. 18 представлена и рассмотрена программа, которая может быть использована при решении задачи о кручении, сформулированной в гл. 6. Эта программа была использована для расчета напряжений сдвига в стержне с квадратной формой сечения (фиг. 6.3), причем разбиение на элементы соответствовало фиг. 7.6. На



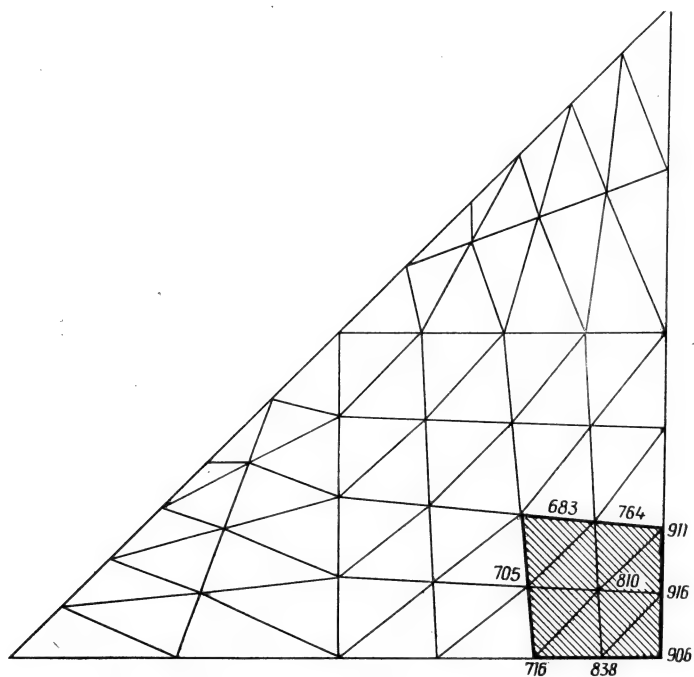
Фиг. 7.7. Согласованные значения  $\tau_{yz}$  для стержня квадратного сечения.

фиг. 7.6 также показаны значения  $\tau_{zy}$  по элементам. Максимальное значение  $\tau_{zy}$ , равное  $892 \text{ Н/см}^2$ , было получено в элементе, ближайшем к узлу, расположенному в середине стороны квадрата. Это значение отличается от теоретического на  $5,6\%$ . Расчетные значения соответствуют крутящему моменту, равному  $196,3 \text{ Н}\cdot\text{см}$ .

Расчетные значения могут быть уточнены путем использования теории согласованных результатов элементов, рассмотренной в

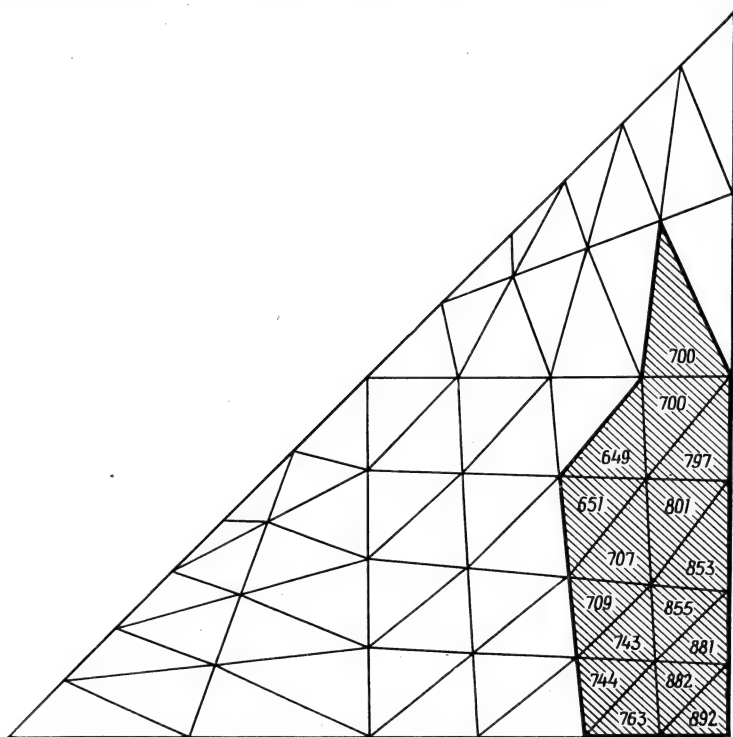


Фиг. 7.8. Согласованные значения  $\tau_{yz}$ , полученные с помощью 23 элементов.



Фиг. 7.9. Согласованные значения  $\tau_{yz}$ , полученные с помощью восьми элементов.

гл. 6. Узловые значения  $\tau_{yz}$ , вычисленные с использованием этой теории, представлены на фиг. 7.7. Значение  $905 \text{ Н/см}^2$ , которое встречается в угловом узле, на  $4,2\%$  меньше теоретического значения, равного  $945 \text{ Н/см}^2$ . Наибольшее сдвиговое напряжение  $\tau_{yz} = 915 \text{ Н/см}^2$  получено в узле, первом из тех, которые расположены выше узла в середине стороны квадрата. Это значение на  $3,2\%$



Фиг. 7.10. Область влияния, соответствующая  $\epsilon = 0,7$ .

отличается от теоретического максимума. Однако положения расчетного и теоретического максимумов не совпадают.

Теория согласованных результатов элементов приводит к системе уравнений, порядок которой совпадает с порядком системы, используемой для определения  $\{\Phi\}$ . Это представляет определенное неудобство, когда в рассмотрение включается большое число узлов. Приближенный метод составления согласованных результатов ограничивается анализом элементов, расположенных в районе с наибольшим результатом элемента. Это приближение называется «областью влияния» [2].

Два примера, которые иллюстрируют концепцию области влияния, приведены на фиг. 7.8 и 7.9. Первый включает 23 элемента и 19 узлов. Результаты очень хорошо согласуются со значениями, вычисленными с использованием всего набора элементов; исключением является внутренняя граница области. Даже при выборе меньшей области, которая включает восемь элементов и девять узлов, максимальные значения снова получаются эквивалентными тем, которые получаются при использовании 64 элементов.

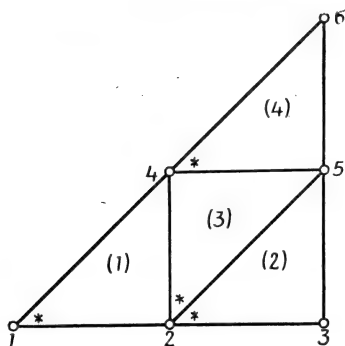
Один из способов определения области влияния состоит в том, что выбирается число, меньшее единицы, скажем  $\varepsilon=0,7$ , и включаются все элементы, результаты которых больше, чем максимальный результат, умноженный на  $\varepsilon$ . Область влияния, соответствующая  $\varepsilon=0,7$  в задаче о кручении, показана на фиг. 7.10.

Преимуществом использования концепции области влияния является сокращение требуемого числа уравнений. Выбор правильного значения  $\varepsilon$  — довольно спорный вопрос, но все же результаты на фиг. 7.9 показывают, что очень ограниченное число элементов может дать результаты, достаточно точные для инженерных расчетов.

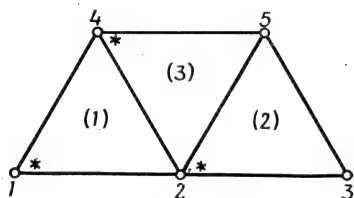
Задача о кручении будет вновь рассмотрена в гл. 16 и 18.

## Задачи

45. Ниже приведены сокращенные матрицы элементов для четырехэлементной модели в задаче о кручении, сформулированной в гл. 6. Используя метод прямой жесткости, постройте глобальные матрицы.



К задаче 45.



К задаче 46.

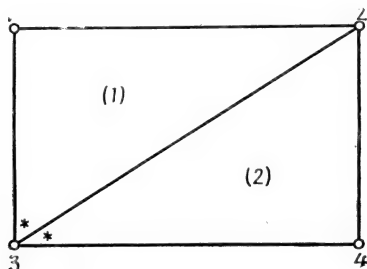
$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = [k^{(3)}] = [k^{(4)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{f^{(1)}\} = \{f^{(2)}\} = \{f^{(3)}\} = \{f^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} 29,07 \\ 29,07 \\ 29,07 \end{Bmatrix}.$$

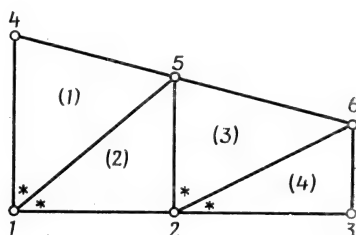
46. Для тела, разбитого на три элемента, ниже даны сокращенные матрицы жесткости. Используя метод прямой жесткости, постройте матрицу  $[K]$ . В каждом узле рассмотрите по одной неизвестной. Узел  $i$  для каждого элемента помечен звездочкой.

$$[k^{(1)}] = [k^{(3)}] = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -8 \\ -4 & 12 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}, \quad [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 12 & -8 & -4 \\ -8 & 16 & -8 \\ -4 & -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

47. Сокращенные матрицы элементов для двухэлементной задачи теории упругости даны ниже. В каждом узле рассматриваются по два перемещения. Используя метод прямой жесткости, постройте матрицу  $[K]$ . Узел  $i$  для каждого элемента помечен звездочкой.



К задаче 47.



К задаче 48.

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 162 & 0 & 0 & -216 & -162 & 216 \\ 0 & 432 & -144 & 0 & 144 & -432 \\ 0 & -144 & 768 & 0 & -768 & 144 \\ -216 & 0 & 0 & 288 & 216 & -288 \\ -162 & 144 & -768 & 216 & 930 & -360 \\ 216 & -432 & 144 & -288 & -360 & 720 \end{bmatrix}.$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} -768 & 0 & -768 & 144 & 0 & -144 \\ 0 & 288 & 216 & -288 & -216 & 0 \\ -768 & 216 & 930 & -360 & -162 & 144 \\ 144 & -288 & -360 & 720 & 216 & -432 \\ 0 & -216 & -162 & 216 & 162 & 0 \\ -144 & 0 & 144 & -432 & 0 & 432 \end{bmatrix}.$$

48. Постройте матрицу  $[K]$  для четырехэлементного тела по данным сокращенным матрицам элементов. В каждом узле одна неизвестная, а узел  $i$  помечен звездочкой.

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -8 \\ -2 & -8 & 10 \end{bmatrix}, \quad [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \quad [k^{(4)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

49. Выполните следующие преобразования приведенной ниже системы уравнений с симметричной матрицей:

а) Приведите матрицу  $[K]$  к треугольному виду и одновременно разложите  $\{F\}$ .

б) Используя только матрицу  $[K]$  треугольного вида, разложите вектор-столбец  $\{F\}^T = [6, 12, 12, 6]$ . Убедитесь, что для выполнения указанного разложения достаточно информации, которая хранится в матрице треугольного вида  $[K]$ .

в) Решите полученную систему уравнений для вектор-столбцов, соответствующих случаям а) и б).

$$\begin{aligned} 4U_1 + 2U_2 &= 4, \\ 2U_1 + 8U_2 + 2U_3 &= 8, \\ 2U_2 + 8U_3 + 2U_4 &= 8, \\ 2U_3 + 4U_4 &= 4. \end{aligned}$$

50. Преобразуйте и решите систему уравнений (6.20), используя метод, изложенный в этой главе.

51. Преобразуйте и решите одну из представленных ниже систем уравнений, когда задано одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad U_1 &= 3; \quad \text{(II)} \quad U_2 = 4, \quad U_4 = -1; \quad \text{(III)} \quad U_3 = 0; \\ \text{(IV)} \quad U_2 &= 0, \quad U_4 = 1, \end{aligned}$$

а)

$$\begin{aligned}
 12U_1 + 6U_2 - 4U_3 + U_4 &= 40, \\
 6U_1 + 18U_2 + 6U_3 - 4U_4 + U_5 &= 75, \\
 -4U_1 + 6U_2 + 24U_3 + 12U_4 - 4U_5 &= 120, \\
 U_1 - 4U_2 + 12U_3 + 18U_4 + 6U_5 &= 75, \\
 U_2 - 4U_3 + 6U_4 + 12U_5 &= 40.
 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 2U_1 + U_2 + 0U_3 + U_4 &= 40, \\
 U_1 + 6U_2 + U_3 + 2U_4 &= 28, \\
 U_2 + 2U_3 + 0U_4 &= 28, \\
 U_1 + 2U_2 + 0U_3 + 6U_4 &= 40.
 \end{aligned}$$

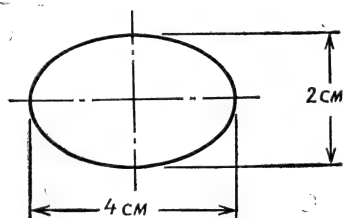
в)

$$\begin{aligned}
 6U_1 + 4U_2 + 2U_3 &= 12, \\
 4U_1 + 12U_2 + 4U_3 &= 18, \\
 2U_1 + 4U_2 + 12U_3 + 4U_4 + 2U_5 &= 24, \\
 4U_3 + 12U_4 + 4U_5 &= 10, \\
 2U_3 + 4U_4 + 6U_5 &= 6.
 \end{aligned}$$

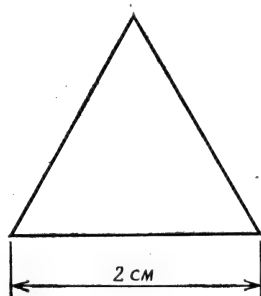
52—56. Представленные ниже поперечные сечения стержней разбейте на линейные треугольные элементы и вычислите максимальное напряжение сдвига, используя программу TORSION, представленную в гл. 18. Для получения исходных данных об элементе можно использовать программу GRID. Каждый из стержней имеет длину 100 см, сделан из стали,  $G=8 \cdot 10^6$  Н/см<sup>2</sup> и подвержен действию крутящего момента величиной 5000 Н·см. Сравните полученные результаты с теоретическими максимумами, когда это возможно.

57. Вычислите узловые значения компонент напряжений сдвига для одного из поперечных сечений задач 52—56, используя представленную в гл. 18 программу CONSTR вычисления согласованного результата элемента.

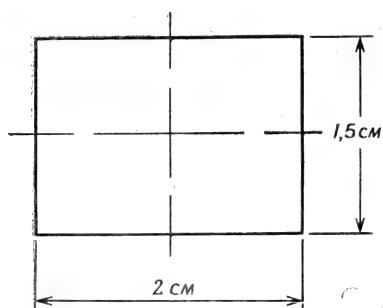
58. Измените программу TORSION так, чтобы можно было рассматривать элементы из разных материалов, и проанализируйте изображенное ниже сечение составного стержня. Стержень имеет длину 100 см и подвержен действию крутящего момента величиной 3000 Н·см.



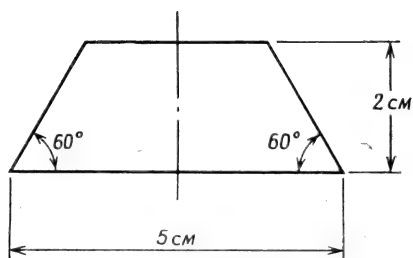
К задаче 52.



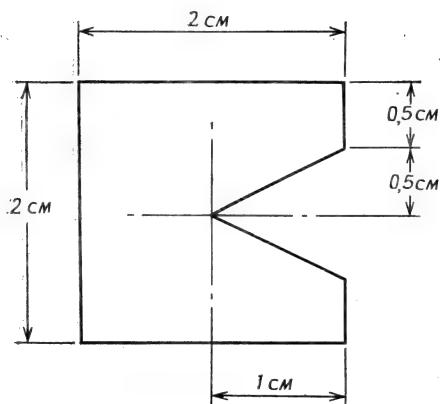
К задаче 53.



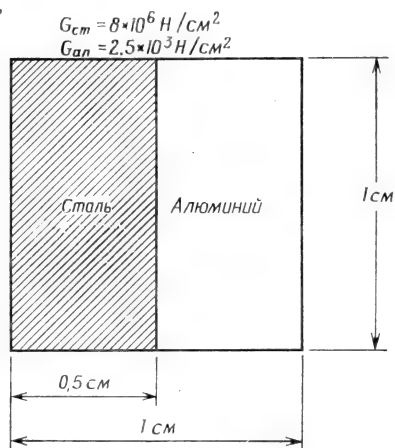
К задаче 54.



К задаче 55.



К задаче 56.



К задаче 58.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Conte S. D., Elementary Numerical Analysis An Algorithmic Approach, McGraw-Hill, 1965.
2. Oden J. T., Reddy J. N., Note on an Approximate Method for Computing Consistent Conjugate Stresses in Elastic Finite Elements, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 6, 55—61 (1973).
3. Pilkey W., Saczalski K., Schaeffer H., Structural Mechanics Computer Programs, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1974, pp. 651—667 (written by McCormick J. M.).
4. Rubinstein M. F., Matrix Computer Analysis of Structures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967, pp. 114—119.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА  
ПО ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Forsythe G. E., Moler C. B., Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967, pp. 114—119. Есть русский перевод: Форсайт Дж., Молер К., Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, изд-во «Мир», М., 1969.

Jenkins W. M., Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis, McGraw-Hill, London, 1969, Ch. 7.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА  
ПО МЕТОДУ ПРЯМОЙ ЖЕСТКОСТИ

Desai C. S., Abel J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold, N. Y., 1972, pp. 181—190.

## Глава 8

### ПЕРЕНОС ТЕПЛА ЗА СЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКЦИИ

Во многих инженерных задачах важным аспектом является знание распределения температуры в теле. Количество тепла, подводимого к телу или теряемого им, может быть вычислено, если известно распределение температуры. Температурное поле, кроме того, влияет на распределение напряжений. Температурные напряжения имеют место в каждом теле, в котором существуют градиенты температуры и которое не может свободно расширяться во всех направлениях. Эти напряжения необходимо учитывать при проектировании вращающихся механизмов, таких, как реактивные двигатели или паровые генераторы. Для расчета температурных напряжений следует прежде всего определить распределение температуры в теле.

В этой главе будет рассмотрено применение метода конечных элементов для определения распределения температуры в теле. Использование этого распределения для расчета напряжений обсуждается в гл. 12.

#### 8.1. Уравнения переноса тепла

Уравнение теплопроводности в сплошной среде имеет вид

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = 0, \quad ](8.1)$$

где  $T$  — температура;  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  — коэффициенты теплопроводности в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  размерности кВт/м·К;  $Q$  — источник тепла внутри тела, который считается положительным, если тепло подводится к телу, его размерность кВт/м<sup>3</sup>.

С уравнением (8.1) связывают два различных типа граничных условий. Если температура известна на некоторой части границы, то пишут

$$T = T_B(s), \quad (8.2)$$

где  $T_B$  — температура на границе, которая может быть функцией координат точек поверхности  $s$ . Если на границе происходит конвективный теплообмен, который характеризуется величиной  $h(T -$

— $T_\infty$ ), или задан поток тепла  $q$ , то граничное условие имеет вид

$$K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} l_z + h(T - T_\infty) + q = 0, \quad (8.3)$$

где  $h$  — коэффициент теплообмена, кВт/м<sup>2</sup>·К;  $T$  — температура на границе (неизвестная),  $K$ ;  $T_\infty$  — температура окружающей среды (известная),  $K$ ;  $l_x$ ,  $l_y$  и  $l_z$  — направляющие косинусы;  $q$  — поток тепла, кВт/м<sup>2</sup>, который считается положительным, если тепло теряется телом. Поток тепла  $q$  и конвективная потеря тепла  $h(T - T_\infty)$  не имеют места на одном и том же участке поверхности границы. Если существуют потери тепла за счет конвекции, то отсутствует отвод или приток тепла за счет теплового потока и наоборот.

Уравнения (8.1) и (8.3) могут быть применены к одномерным и двумерным задачам после простого вычеркивания членов, связанных с ненужными координатами. Уравнение для одномерной задачи записывается в виде

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = 0 \quad (8.4)$$

с граничным условием

$$K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + h(T - T_\infty) + q = 0. \quad (8.5)$$

Если конвективный теплообмен отсутствует и, кроме того, поток тепла равен нулю, то уравнение (8.3) сводится к соотношению

$$\frac{dT}{dn} = 0,$$

которое выражает условие существования теплоизолированной границы ( $n$  — внешняя нормаль).

Минимизация функционала, связанного с (8.1), была рассмотрена в гл. 5. Уместно подытожить здесь результаты этого обсуждения, прежде чем начать рассмотрение одномерного случая переноса тепла. Запишем матрицу теплопроводности элемента:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS. \quad (8.6)$$

Матрица  $[N^{(e)}]$  содержит функции формы, причем <sup>1)</sup>

$$T^{(e)} = [N^{(e)}] \{T\}. \quad (8.7)$$

<sup>1)</sup>  $T$  без верхнего индекса или скобок обозначает обычную функцию.

Матрица  $[D^{(e)}]$  содержит значения коэффициентов теплопроводности:

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} K_{xx}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (8.8)$$

а матрица  $[B^{(e)}]$  получается дифференцированием  $[N^{(e)}]$  по  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Соотношение для определения  $[B^{(e)}]$  имеет вид

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B^{(e)}] \{T\}. \quad (8.9)$$

Вектор-столбец правых частей уравнений для элемента определяется формулой (5.46):

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV + \int_{S_1^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS - \int_{S_2^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_{\infty} h dS, \quad (8.10)$$

где величины  $Q$ ,  $q$ ,  $T_{\infty}$  и  $h$  имеют заданные числовые значения.

Вышеприведенные формулы содержат все данные, необходимые для составления матриц элементов в задаче о переносе тепла за счет теплопроводности. В следующих нескольких разделах наше внимание будет сосредоточено на уравнениях для отдельного элемента, поэтому мы будем опускать верхний индекс  $(e)$  во всех обозначениях матриц элементов, исключая случай, когда необходимо будет различать два разных элемента.

## 8.2. Одномерный случай переноса тепла

Интерполяционный полином для одномерного линейного элемента имеет вид

$$T = N_i T_i + N_j T_j, \quad (8.11)$$

где

$$N_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{и} \quad N_j = \frac{x}{L}.$$

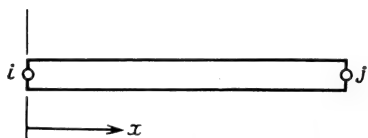
Эти функции формы определены относительно системы координат, показанной на фиг. 8.1. Элемент имеет длину  $L$ . Матрицы в (8.7) и (8.9) принимают теперь вид

$$[N] = [N_i \quad N_j] = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad \frac{x}{L} \right], \quad (8.12)$$

$$\{g\} = \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{L} T_i + \frac{1}{L} T_j = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix},$$

поэтому

$$[B] = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right]. \quad (8.13)$$



Фиг. 8.1. Линейный одномерный элемент.

Матрица свойств материала сводится к одному коэффициенту:

$$[D] = [K_{xx}]. \quad (8.14)$$

Вычислим интегралы в (8.6):

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T [D] [B] dV &= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [K_{xx}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A dx = \\ &= \frac{AK_{xx}}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Площадь поперечного сечения при этом предполагается постоянной.

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS = hP \int_0^L \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \\ \left( \frac{x}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx, \quad (8.16)$$

так как  $dS = P dx$ , где  $P$  — периметр. Периметр тоже предполагается неизменным вдоль оси  $x$ . Производя перемножение в (8.16) и вычисляя интеграл, имеем

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS = \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Матрица теплопроводности элемента получается сложением матриц (8.15) и (8.17):

$$[k^{(e)}] = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{PhL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Член в (8.18), описывающий конвекцию, исчезает, если  $h$  равно нулю на границе элемента.

Вычисление интегралов в векторе сил элемента (8.10) дает

$$\int_V [N]^T Q dV = QA \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{QAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

и

$$\int_{S_1} [N]^T q dS = qP \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.20)$$

Так как третий интеграл идентичен по форме второму, можно сразу же записать

$$\int_{S_2} [N]^T \cdot hT_{\infty} dS = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.21)$$

Полное выражение для  $\{f^{(e)}\}$  теперь имеет вид

$$\{f^{(e)}\} = -\frac{QAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.22)$$

Имея в виду последующее включение этого члена в сумму  $\{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ , это выражение можно переписать как

$$\{f^{(e)}\} = -\left( \frac{QAL - qPL + hT_{\infty}PL}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.23)$$

Примером одномерной задачи переноса тепла является задача об охлаждении стержня. Рассмотрим стержень, один конец которого соединен с источником тепла; через боковую поверхность стержня и другой его конец тепло отводится в окружающую среду. Формулы (8.19) и (8.23) предполагают, что потери тепла за счет конвекции происходят только от боковой поверхности. Теперь рассмотрим соотношения, которые связаны с отводом тепла от конца одномерного элемента.

Предположим, что тепло отводится через поверхность правого конца стержня (узел  $j$ ). Потеря (приток) тепла происходит либо в результате конвективного теплообмена, либо из-за наличия заданного теплового потока  $q$ . Поэтому должны быть рассмотрены только поверхностные интегралы. Рассмотрим поверхностный интеграл в матрице теплопроводности:

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \int_S h \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} dS.$$

Так как мы интересуемся поверхностью в  $j$ -м узле,  $N_i=0$ ,  $N_j=1$ , и в результате подстановки этих величин имеем

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \int_S h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} dS = \int_S h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dS,$$

или

$$\int_S h [N]^T [N] dS = hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Эта матрица должна добавляться к сумме матриц (8.18), если на свободном конце происходит потеря тепла. Совершенно ясно, что коэффициент теплообмена в (8.24) может отличаться от коэффициента, который задан на боковой поверхности.

Поверхностные интегралы в матрице  $\{f^{(e)}\}$  принимают вид

$$\int_S [N]^T h T_{\infty} dS = h T_{\infty} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

и

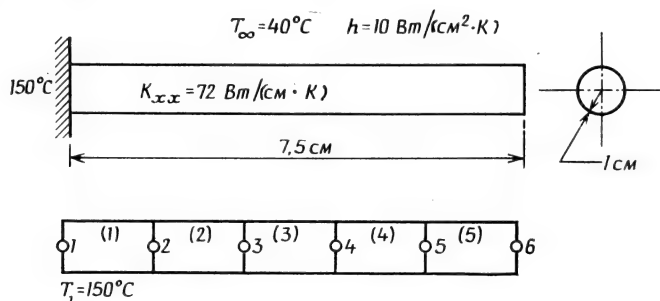
$$\int_S [N]^T q dS = qA \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Использование формул (8.24) — (8.26) вместе с (8.18) и (8.23) иллюстрируется на следующем примере.

### Пример

59. Требуется вычислить распределение температуры в одномерном стержне с приведенными ниже физическими характеристиками.

Разделим конструкцию на 5 элементов длиной 1,5 см каждый. Матрицы элементов для первых четырех элементов идентичны и могут быть составлены с помощью формул (8.18) и (8.23). За-



К задаче 59.

пишем величины различных параметров, входящих в эти соотношения:

$$\frac{AK_{xx}}{L} = 48\pi,$$

$$\frac{hPL}{6} = 5\pi,$$

$$hT_{\infty}PL = 1200\pi,$$

$$hA = 10\pi,$$

$$hT_{\infty}A = 400\pi.$$

Матрица теплопроводности для первого элемента имеет вид

$$[k^{(1)}] = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

или

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 48\pi & -48\pi \\ -48\pi & 48\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10\pi & 5\pi \\ 5\pi & 10\pi \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 58 \end{bmatrix}.$$

Матрицы теплопроводности для второго, третьего и четвертого элементов идентичны  $[k^{(1)}]$ . Вектор нагрузки (8.23) элемента преобразуется к виду

$$\{f^{(1)}\} = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \{f^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 600\pi \end{Bmatrix},$$

так как  $Q$  и  $q$  равны нулю.

Матрицы для пятого элемента получаются из соответствующих матриц первого элемента добавлением членов, описывающих потери тепла на правом конце стержня. Чтобы построить матрицу теплопроводности, нужно добавить к  $[k^{(1)}]$  результаты вычисле-

ний в (8.24). Так как  $hA=10\pi$ , нужно добавить следующую матрицу:

$$hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10\pi \end{bmatrix}$$

и

$$[k^{(5)}] = [k^{(1)}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10\pi \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 68 \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки для пятого элемента

$$\{f^{(5)}\} = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + hAT_{\infty} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

или

$$\{f^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 600\pi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 400\pi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 1000\pi \end{Bmatrix}.$$

После применения метода прямой жесткости совокупность рассмотренных матриц элементов приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} 58 & -43 & & & & \\ -43 & 116 & -43 & & & \\ & -43 & 116 & -43 & & \\ & & -43 & 116 & -43 & \\ & & & -43 & 116 & -43 \\ & & & & -43 & 116 & -43 \\ & & & & & -43 & 68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{Bmatrix}.$$

Здесь проведено сокращение на множитель  $\pi$ , так как он входит в обе части системы уравнений. Пустые места в  $[K]$  означают нулевые коэффициенты.

Значение  $T_1$  известно ( $150^\circ\text{C}$ ), так что система уравнений должна быть модифицирована перед решением. Эта модификация преобразует столбец правых частей к виду

$$\{F\}^T = [8700 \ 7650 \ 1200 \ 1200 \ 1200 \ 1000].$$

После решения системы имеем

$$\{T\}^T = [150 \ 82,6 \ 59 \ 48,6 \ 44,2 \ 42,6].$$

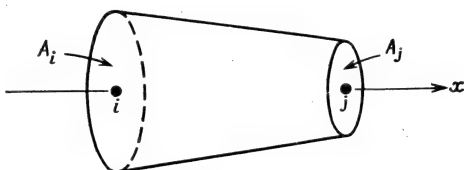
Теоретические значения температуры [2] следующие:

$$\{T_{\text{теорет}}\}^T = [150 \ 89,9 \ 62,8 \ 50,6 \ 45,2 \ 43,3].$$

Результаты, полученные по методу конечных элементов, достаточно хорошо согласуются с истинными значениями, если учесть, что было проведено разбиение области на одинаковые элементы.

Решение по методу конечных элементов можно было бы улучшить, если использовать более короткие элементы вблизи стены, в которую заделан стержень.

В предыдущем примере площадь поперечного сечения стержня была постоянной. Этого требовать необязательно. Площадь может быть также функцией длины элемента. Если площадь элемен-



Фиг. 8.2. Одномерный элемент с переменной площадью сечения.

та меняется по длине, то матрица элемента должна быть преобразована. Обсудим теперь это преобразование.

Рассмотрим элемент, изображенный на фиг. 8.2. Его площадь поперечного сечения изменяется от  $A_i$  на левом конце до  $A_j$  на правом. Если ограничиться случаем линейного изменения площади, можно сразу записать соотношение для площади

$$A = N_i A_i + N_j A_j, \quad (8.27)$$

где  $N_i$  и  $N_j$  — линейные функции формы.

Следующий шаг — определение матриц элемента. Используя для вычисления  $[k^{(e)}]$  первую часть формулы (8.15), получаем

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{K_{xx}}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L A dx. \quad (8.28)$$

Так как величина  $A$  в этой формуле не постоянна вдоль  $x$ , ее нельзя вынести за знак интеграла. Подстановка выражения (8.27) в (8.28) дает

$$\frac{K_{xx}}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) A_i + \frac{x}{L} A_j \right] dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{K_{xx}}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{L}{2} A_i + \frac{L}{2} A_j \right].$$

или

$$\frac{K_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{A_i + A_j}{2}. \quad (8.29)$$

Так как  $(A_i + A_j)/2$  равно средней площади элемента, выражение (8.29) может быть записано как

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{K_{xx} \bar{A}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.30)$$

где  $\bar{A}$  — средняя площадь. Формула (8.30) совпадает с (8.15) с точностью до замены площади на ее среднее значение.

Интегралы по боковой поверхности могут быть выражены аналогичным образом. Периметр можно записать в виде соотношения

$$P = N_i P_i + N_j P_j, \quad (8.31)$$

с учетом которого имеем

$$h \int_S [N]^T [N] dS = h \int_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j^2 \end{bmatrix} P dx. \quad (8.32)$$

Первый коэффициент в (8.32) после подстановки  $N_i$  и  $N_j$  и вычисления интеграла будет равен

$$\int_0^L N_i^2 P dx = \int_0^L (N_i^2 P_i + N_i^2 N_j P_j) dx = \frac{L}{12} (3P_i + P_j). \quad (8.33)$$

Поверхностные интегралы представляются соотношениями

$$h \int_S [N]^T [N] dS = \frac{hL}{12} \begin{bmatrix} (3P_i + P_j) & (P_i + P_j) \\ (P_i + P_j) & (P_i + 3P_j) \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

и

$$hT_\infty \int_S [N]^T dS = \frac{hT_\infty L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix}. \quad (8.35)$$

Сложив матрицы (8.30) и (8.34), можно получить  $[k^{(e)}]$ . Соотношение (8.35) дает часть  $\{f^{(e)}\}$ . Из формул (8.34) и (8.35) ясно, что их нельзя получить из (8.17) или (8.21) простой подстановкой среднего периметра в случае элемента конической формы.

### 8.3. Двумерный перенос тепла

Треугольный элемент с тремя узлами широко используется для решения двумерных задач теплопроводности. Этот элемент уже применялся при рассмотрении кручения некругового стержня, и теперь можно воспользоваться некоторыми результатами, полученными в гл. 6. Напомним функции формы для линейного треугольного элемента:

$$N_{\beta} = \frac{1}{2A} (a_{\beta} + b_{\beta}x + c_{\beta}y), \quad \beta = i, j, k, \quad (8.36)$$

где  $a_{\beta}$ ,  $b_{\beta}$ ,  $c_{\beta}$  определены в (3.10). Температура дается формулой

$$T = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}, \quad (8.37)$$

где  $T_i$ ,  $T_j$  и  $T_k$  — значения температуры в узлах, последовательно проходимых от узла  $i$  в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Запишем еще матрицу градиентов  $[B]$ :

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

и матрицу свойств материала  $[D]$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}, \quad (8.39)$$

Теперь можно вычислить матрицу теплопроводности элемента. Первое слагаемое принимает вид

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_V \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV. \quad (8.40)$$

Предполагая толщину элемента единичной, заменим  $dV$  на  $dA$ . Подынтегральное выражение в (8.40) постоянно и может быть вынесено за знак интеграла:

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_A dA = A [B]^T [D] [B]. \quad (8.41)$$

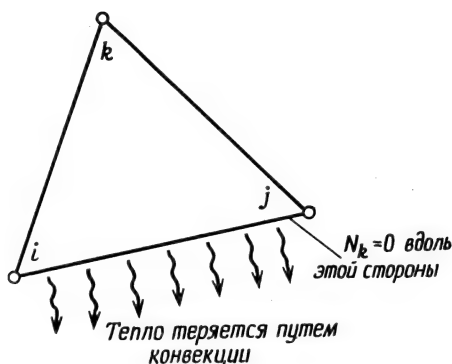
Вычисляя произведение матриц, имеем

$$[k^{(e)}] = \frac{K_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (8.42)$$

Второй интеграл  $\int_S h[N]^T[N]dS$  должен быть вычислен по поверхности. Подставляя в матрицу  $[N]$  функции формы и выполняя матричное умножение, получаем

$$\int_S h[N]^T[N]dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS. \quad (8.43)$$

Функции формы зависят от  $x$  и  $y$ , поэтому произведения вида  $N_i N_j$  не могут быть вынесены за знак интеграла. Кроме того, значение интеграла зависит от того, на какой поверхности наблюда-



Фиг. 8.3. Конвективные потери тепла вдоль одной из сторон треугольного элемента.

ется конвективный теплообмен. Если, например, конвекции подвержена сторона между узлами  $i$  и  $j$  (фиг. 8.3), то  $N_k$  равно нулю вдоль этой стороны и интеграл сводится к следующему выражению:

$$\int_S h[N]^T[N]dS = h \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS. \quad (8.44)$$

Если любая из двух других сторон подвержена конвекции, то расположение отличных от нуля членов в (8.43) будет иным, чем в (8.44).

Вычисление произведений в (8.43) не представит труда, если применить  $L$ -координаты и интегральные формулы (3.43). Предполагая, что  $L_1$  измеряется от стороны, противоположной  $i$ -му узлу, можно записать

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j \text{ и } L_3 = N_k.$$

Если предположить, что конвективный теплообмен имеет место на поверхности стороны элемента между узлами  $i$  и  $j$ , то в точках этой поверхности  $N_k = L_3 = 0$  и соотношение (8.44) примет вид

$$\int_S h [N]^T [N] dS = h \int_{\mathcal{L}_{ij}} \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_2 L_2 & 0 \\ L_2 L_1 & L_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\mathcal{L}, \quad (8.45)$$

где  $dS = t d\mathcal{L}$ , причем толщина  $t$  предполагается единичной. Два типа произведений входят в формулу (8.45): квадрат величины  $L_1^2$  или  $L_2^2$  и перекрестное произведение  $L_1 L_2$ . Начнем с квадратных членов:

$$\int_{\mathcal{L}_{ij}} L_1^2 d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{L}_{ij}} L_1^2 L_2 d\mathcal{L} = \frac{2!0!}{(2+0+1)!} \mathcal{L}_{ij} = \frac{\mathcal{L}_{ij}}{3},$$

где  $\mathcal{L}_{ij}$  — длина стороны между узлами  $i$  и  $j$ . Интегрирование перекрестного произведения дает

$$\int_{\mathcal{L}_{ij}} L_1 L_2 d\mathcal{L} = \frac{1!1!\mathcal{L}_{ij}}{(1+1+1)!} = \frac{\mathcal{L}_{ij}}{6}.$$

Интегралы  $\int_{\mathcal{L}_{ij}} L_2^2 d\mathcal{L}$  и  $\int_{\mathcal{L}_{ij}} L_1^2 d\mathcal{L}$  равны между собой. Подставляя полученные результаты в формулу (8.45), получаем

$$h \int_{\mathcal{L}_{ij}} [N]^T [N] d\mathcal{L} = \frac{h \mathcal{L}_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.46a)$$

Аналогичные соотношения получаются для стороны между узлами  $j$  и  $k$ :

$$\int_{\mathcal{L}_{jk}} h [N]^T [N] dS = \frac{h \mathcal{L}_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.46b)$$

и для стороны между узлами  $k$  и  $i$ :

$$\int_{\mathcal{L}_{ki}} h [N]^T [N] dS = \frac{h \mathcal{L}_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.46b)$$

Три интеграла в выражении для вектора нагрузки элемента также легко вычисляются, если воспользоваться  $L$ -координатами. Начнем с интеграла  $\int_V [N]^T Q dV$ ; предположим, что величина  $Q$

постоянна внутри элемента. Тогда будем иметь

$$Q \int_V [N]^T dV = Q \int_V \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} dV = \frac{QV}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.47)$$

Таким образом, тепло, генерируемое в элементе, распределяется поровну по трем узлам. Интегралы  $\int_{S_1} [N]^T q dS$  и  $\int_{S_2} [N]^T h T_\infty dS$  записываются в одинаковой форме:

$$\int_S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS, \quad (8.48)$$

так что только один из них необходимо вычислить. Поскольку интеграл (8.48) поверхностный, его можно рассмотреть так же, как интеграл (8.43). Результаты зависят от того, на какой из сторон элемента происходит конвективный теплообмен, характеризуемый величиной  $h$ , или приток тепла за счет теплового потока  $q$ . Предполагая  $q$  постоянным по поверхности элемента, получим для интеграла (8.48) три следующие формы записи:

$$q \int_S [N]^T dS = \begin{cases} \frac{q \mathcal{L}_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & (8.49a) \end{cases}$$

$$q \int_S [N]^T dS = \begin{cases} \frac{q \mathcal{L}_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, & (8.49b) \end{cases}$$

$$q \int_S [N]^T dS = \begin{cases} \frac{q \mathcal{L}_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. & (8.49b) \end{cases}$$

Величина

$$h T_\infty \int_S [N]^T dS$$

идентична (8.49a) — (8.49b) с учетом замены  $q$  на  $h T_\infty$ .

Если тепловой поток или конвективный теплообмен наблюдаются на двух сторонах элемента, то поверхностный интеграл заменяется суммой интегралов по каждой из сторон. То же самое относится к интегралу (8.43).

В большинстве задач о переносе тепла интерес представляют значения температуры в узловых точках. Иногда бывает необходи-

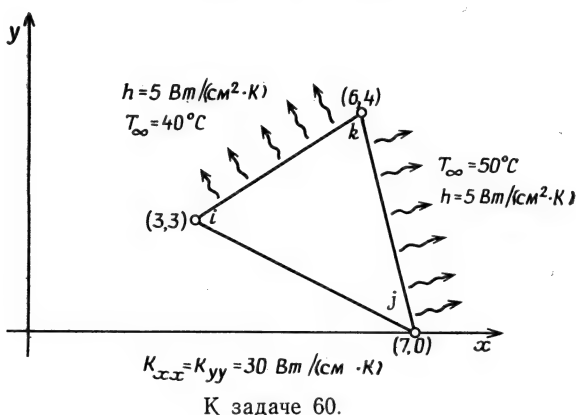
мо определять градиенты температуры. После того как определены узловые значения, градиенты температуры находятся с помощью соотношения

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}. \quad (8.50)$$

Численный пример, который приводится ниже, иллюстрирует применение полученных выше соотношений.

### Пример

60. Ниже изображен элемент, который использован для дискретизации сплошной среды. По двум поверхностям этого элемента происходит конвективный теплообмен. Указаны размеры элемента и физические характеристики. Требуется составить матрицы элемента, предполагая его толщину единичной.



Рассмотрим матрицу теплопроводности элемента:

$$k^{(e)} = \frac{K_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{h \mathcal{L}_{ik}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h \mathcal{L}_{kj}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Константы  $b$  и  $c$  вычисляются по формулам

$$b_i = Y_j - Y_k = 0 - 4 = -4,$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 4 - 3 = 1,$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 3 - 0 = 3,$$

$$c_i = X_k - X_j = 6 - 7 = -1,$$

$$c_j = X_i - X_k = 3 - 6 = -3,$$

$$c_k = X_j - X_i = 7 - 3 = 4,$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A = -\frac{13}{2}.$$

Длины сторон  $\mathcal{L}_{jk}$  и  $\mathcal{L}_{ki}$  равны

$$\mathcal{L}_{jk} = \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2} = \sqrt{(7 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ см},$$

$$\mathcal{L}_{ki} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ см}.$$

Подстановка полученных числовых значений в  $[k^{(e)}]$  дает

$$[k^{(e)}] = \frac{30}{26} \begin{bmatrix} 16 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \frac{30}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -12 \\ -4 & -12 & 16 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{5(4,12)}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{5(3,16)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или

$$[k^{(e)}] = \frac{30}{26} \begin{bmatrix} 17 & -1 & -16 \\ -1 & 10 & -9 \\ -16 & -9 & 25 \end{bmatrix} + \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 6,32 & 0 & 3,16 \\ 0 & 8,24 & 4,12 \\ 3,16 & 4,12 & 14,56 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 24,88 & -1,15 & 21,09 \\ -1,15 & 18,41 & -6,96 \\ 21,09 & -6,96 & 40,98 \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки элемента  $\{f^{(e)}\}$  представляет собой сумму двух поверхностных интегралов по каждой из сторон, где происходит

конвективный теплообмен:

$$\begin{aligned}\{f^{(e)}\} &= \frac{hT_{\infty}\mathcal{L}_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{hT_{\infty}\mathcal{L}_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{5 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 12}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{5 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 16}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 515 \\ 515 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 316 \\ 0 \\ 316 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 316 \\ 515 \\ 831 \end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

#### 8.4. Трехмерный случай переноса тепла

Вывод соотношений для элемента в трехмерных задачах переноса тепла аналогичен соответствующим процедурам в одномерном и двумерном случаях. В качестве элемента дискретизации рассмотрим тетраэдр с четырьмя узлами. Функции формы, соответствующие данному случаю, имеют вид

$$N_{\beta} = a_{\beta} + b_{\beta}x + c_{\beta}y + d_{\beta}z, \quad (8.51)$$

где константы вычисляются с использованием определителей или матричным умножением, как показано в гл. 3. Запишем необходимые матрицы

$$[N] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l], \quad (8.52)$$

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

Интегралы довольно легко вычисляются, если воспользоваться объемными  $L$ -координатами

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k, \quad \text{и} \quad L_4 = N_l.$$

Вычисление интегралов дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}\int_V [B]^T [D] [B] dV &= \frac{K_{xx}}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_l \\ & b_i b_j & b_j b_k & b_j b_l \\ & & b_k b_k & b_k b_l \\ \text{Симметрично} & & & b_l b_l \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{K_{yy}}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_l \\ & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_l \\ & & c_k c_k & c_k c_l \\ \text{Симметрично} & & & c_l c_l \end{bmatrix} + \frac{K_{zz}}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_l \\ & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_l \\ & & d_k d_k & d_k d_l \\ \text{Симметрично} & & & d_l d_l \end{bmatrix}, \quad (8.54)\end{aligned}$$

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \frac{h S_{ijkl}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (8.55)$$

$$\int_V [N]^T Q dV = \frac{QV}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (8.56)$$

$$\int_S T_\infty h [N]^T dS = \frac{h T_\infty S_{ijkl}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.57)$$

Для интеграла (8.55) существуют три другие формы записи, по одной на каждую из оставшихся сторон. В каждой из них значения коэффициентов на главной диагонали равны двум и значения ненулевых коэффициентов вне главной диагонали равны единице. Коэффициенты в строках и столбцах, соответствующих узлам, расположенным вне рассматриваемой поверхности, равны нулю. Для интеграла (8.57) тоже существуют три другие формы записи. Нулевой коэффициент находится в строке, соответствующей узлу вне рассматриваемой поверхности.  $S_{ijk}$  — площадь поверхности, содержащая узлы  $i, j, k$  и т. д.

## 8.5. Преобразования координат

При выводе уравнения (8.1) используется предположение, важное для применения метода конечных элементов к задачам, рассматривающим анизотропные материалы. Главные оси инерции должны быть параллельны координатным осям. Матрицы элемента должны быть составлены относительно главных осей инерции, которые могут быть различным образом ориентированы относительно глобальной системы координат.

Это требование усложняет ввод исходной информации о координатах узлов элемента. Если координаты узловых точек измеряются относительно глобальной системы координат, то для вычисления координат узлов в локальной системе координат необходимо выполнить преобразование координат. Включение преобразования координат в программу обычно несложная задача, но она требует использования некоторых приемов для того, чтобы указывать

вычислительной машине момент использования этого преобразования. Эти приемы связаны с вводом дополнительного параметра для каждого элемента.

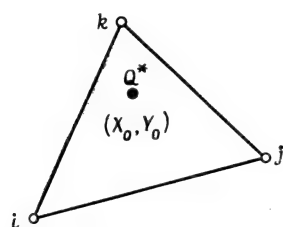
Запишем формулы преобразования для двумерного случая:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (8.58)$$

Здесь  $x'$ ,  $y'$  соответствуют локальной системе координат, а  $x$ ,  $y$  — координаты глобальной системы. Эти формулы предполагают совпадение начала координат обеих систем.

## 8.6. Точечные источники

До сих пор мы не рассматривали важные для многих физических задач понятия точечного и линейного источников. Говорят, что точечный (или линейный) источник тепла существует, когда генерирование тепла  $Q$  происходит внутри очень малого объема



Фиг. 8.4. Точечный источник внутри треугольного элемента.

или очень малой площади. Физическими примерами линейных источников являются проложенные в земле трубы для подачи горячей воды и (или) водяного пара и проводящий электрический ток провод в электропроводящей среде. В каждом из этих случаев площадь поперечного сечения трубы или провода мала по сравнению с размерами окружающей среды. В задачах о течении грунтовых вод насосы, выкачивающие воду из водоносного слоя, также рассматриваются как точечные источники.

Точечные и линейные источники достаточно часто встречаются в окружающей действительности, что оправдывает наше внимание к ним. Мы ограничимся обсуждением источника внутри двумерного элемента, но процедура, которая будет рассмотрена, очень быстро распространяется и на трехмерный элемент.

Рассмотрим треугольный элемент на фиг. 8.4 с линейным источником  $Q^*$  [кВт/м] (тепло притекает и считается положительным), расположенным в точке  $X_0$ ,  $Y_0$ . Так как тепловой источник находится в точке,  $Q$  теперь не постоянно внутри объема элемента, а является функцией координат  $x$  и  $y$ . Используя единичные импульсные функции  $\delta(x-x_0)$  и  $\delta(y-y_0)$  [1], можно записать

$$Q = Q^* \delta(x-x_0) \delta(y-y_0). \quad (8.59)$$

## Интеграл

$$\int_V [N]^T Q dV$$

может быть теперь записан как

$$\int_V [N]^T Q dV = Q^* \int_A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) dx dy. \quad (8.60)$$

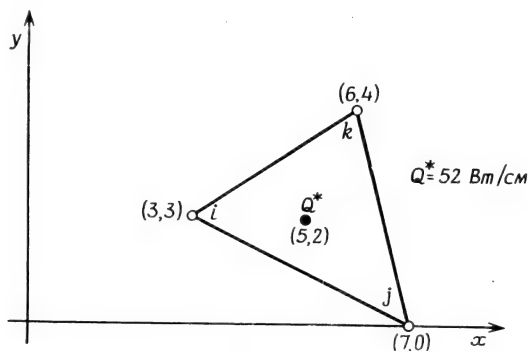
Толщина элемента предполагается равной единице. Используя известные свойства импульсных функций, имеем

$$\int_V [N]^T Q dV = Q^* \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix}_{x=X_0, y=Y_0}. \quad (8.61)$$

Соотношение (8.61) устанавливает, что, если точечный (линейный) источник находится внутри элемента,  $Q$  распределяется по узлам пропорционально соответствующим величинам  $N_i$ ,  $N_j$  и  $N_k$ , которые вычисляются с помощью координат точечного источника. Так как  $\sum N_\beta = 1$  в любой точке внутри элемента, мы не получим величины, большей чем  $Q^*$ .

## Пример

61. Интенсивность источника  $Q^* = 52$  Вт/см. Источник находится в точке с координатами (5.2) внутри элемента, показанного ниже (этот элемент использовался в задаче 60). Требуется определить распределение  $Q^*$  по узлам элемента.



К задаче 61.

Значения  $b$  и  $c$  были вычислены в задаче 60:

$$\begin{aligned} b_i &= -4, & c_i &= -1, \\ b_j &= 1, & c_j &= -3, \\ b_k &= 3, & c_k &= 4. \end{aligned}$$

Вычислим константы  $a$ :

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j = (7)(4) - (6)(0) = 28, \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k = (6)(3) - (3)(4) = 6, \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i = (3)(0) - (7)(3) = -21. \end{aligned}$$

Вспоминая, что  $2A=13$ , соотношения для  $N_\beta$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{13} [28 - 4x - y], \\ N_j &= \frac{1}{13} [6 + x - 3y], \\ N_k &= \frac{1}{13} [-21 + 3x + 4y]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $X_0=5$  и  $Y_0=2$ , получаем

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{13} [28 - 4(5) - 2] = \frac{6}{13}, \\ N_j &= \frac{1}{13} [6 + 5 - 3(2)] = \frac{5}{13}, \\ N_k &= \frac{1}{13} [-21 + 3(5) + 4(2)] = \frac{2}{13}. \end{aligned}$$

Величина  $Q^*$  разделяется по узлам  $i, j$  и  $k$  на части  ${}^6/_{13}$ ,  ${}^5/_{13}$  и  ${}^2/_{13}$  соответственно. Поэтому интеграл  $\int_V [N]^T Q dV$  для этого элемента равен

$$\int_V [N]^T Q dV = Q^* \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}_{\substack{x=X_0 \\ y=Y_0}} = \frac{52}{13} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 20 \\ 8 \end{Bmatrix} \text{ Вт/см.}$$

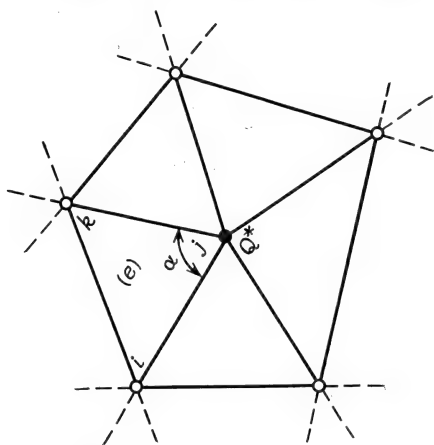
При разбиении на элементы сплошной среды точечный (линейный) источник можно разместить в одном из узлов. Это упрощает интегрирование выражения (8.63). Предположим, что источник

находится в  $j$ -м узле (фиг. 8.5), тогда  $N_i = N_k = 0$  и

$$\int_V [N]^T Q dV = Q^* \int_A \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dA =$$

$$= Q^* \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}_{\substack{x=Y_j \\ y=Y_j}} = Q^* \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.62)$$

Далее  $Q^*$  в (8.62) должно быть преобразовано с учетом того, что источник относится теперь к более чем одному элементу. Величина интенсивности источника должна быть распределена по эле-



Фиг. 8.5. Точечный источник в узле.

ментам, окружающим узел. Это распределение проводится в соответствии с тем, какую часть от  $360^\circ$  составляет угол при вершине данного элемента, расположенной в узле  $j$ . Правильное соотношение для элемента  $(e)$  на фиг. 8.5 имеет вид

$$\int_V [N]^T Q dV = \frac{\alpha Q^*}{360} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.63)$$

Однако нет необходимости вычислять угол  $\alpha$  для различных элементов, окружающих узловый источник. После того как с помощью метода прямой жесткости уравнения для отдельных элементов будут объединены, совместный вклад всех элементов, относящихся к этому узлу, составит полную величину  $Q^*$ . Простей-

ший способ учета узлового источника состоит в добавлении величины  $Q^*$  к глобальному вектору нагрузки  $\{F\}$ , точнее к той его компоненте, которая соответствует глобальной степени свободы, отнесенной к этому узлу.

В случае трехмерного элемента источник, локализованный внутри элемента, распределяется по четырем узлам в соответствии с формулой

$$\int_V [N]^T \{Q\} dV = Q^* \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix}_{\substack{x=X_0 \\ y=Y_0 \\ z=Z_0}}, \quad (8.59)$$

где  $(X_0, Y_0, Z_0)$  — координаты точки расположения источника.

## 8.7. Машинная реализация

В гл. 18 представлена программа TDHEAT, способная решать двумерные задачи переноса тепла. Эта программа ограничена одним набором характеристик материала; кроме того, главные оси инерции должны быть параллельны координатным осям  $x, y$ . Блок-схема, представленная на фиг. 7.3, может быть использована для анализа работы этой программы.

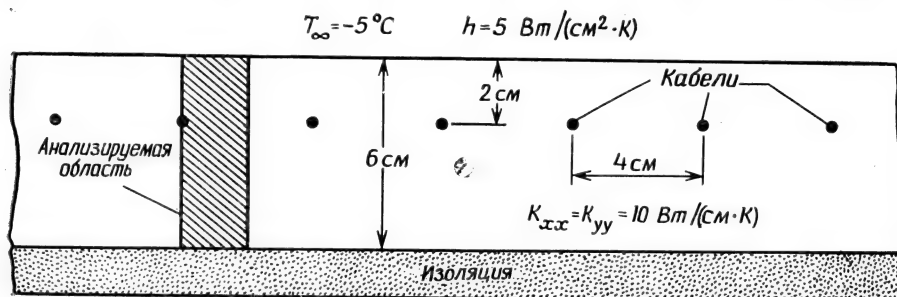
Задание исходных данных об элементе в программе TDHEAT существенно отличается от задания исходной информации об элементе в любой другой программе, представленной в гл. 18. Вычислительной машине должно быть указано, какая сторона элемента подвержена конвективному теплообмену, если он имеет место. Номер каждой стороны, подверженной теплообмену, перфорируется в качестве исходных данных об элементе, начиная со столбца 75. Максимально допустимы две стороны, и нумерация этих сторон соответствует обходу элемента против часовой стрелки, начиная со стороны, расположенной между узлами  $i$  и  $j$ .

### 8.7.1. Постановка задачи

Ряд кабелей помещен в теплопроводящую среду (фиг. 8.6). Кабели расположены на глубине 2 см от поверхности среды, а расстояние между их центрами составляет 4 см. Среда имеет коэффициенты теплопроводности  $K_{xx}=K_{yy}=10$  Вт/см·К. Коэффициент теплообмена на поверхности среды  $h=5$  Вт/см<sup>2</sup>·К. Воздух на границе с поверхностью имеет температуру  $-5^\circ\text{C}$ . Проводящая среда снизу ограничена толстым слоем теплоизоляции. Необходимо определить распределение температуры в теле, если известно, что мощность излучения тепла каждым кабелем составляет 200 Вт на единицу длины.

## 8.7.2. Решение на ЭВМ

Последовательное размещение кабелей и тот факт, что каждый из них излучает одинаковое количество тепла, позволяют сократить размеры области анализа. Легко заметить два семейства плоскостей симметрии в задаче: вертикальные плоскости, содержащие



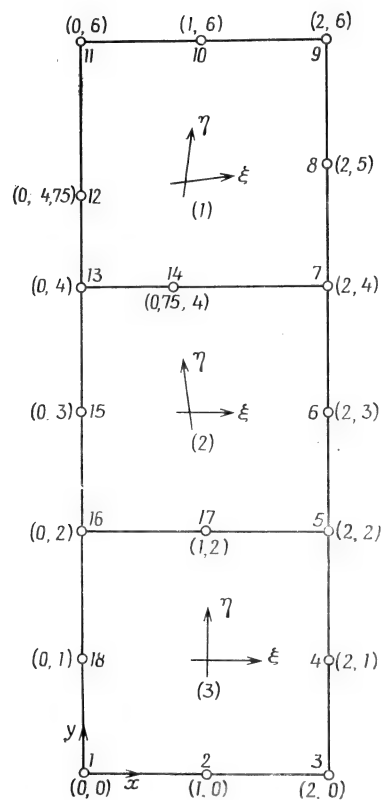
Фиг. 8.6. Кабели в теплопроводящей среде.

кабели, и вертикальные плоскости, проходящие на равном расстоянии между ними, причем последние из указанных плоскостей могут рассматриваться как теплонепроницаемые границы. Окончательная область анализа показана на фиг. 8.6.

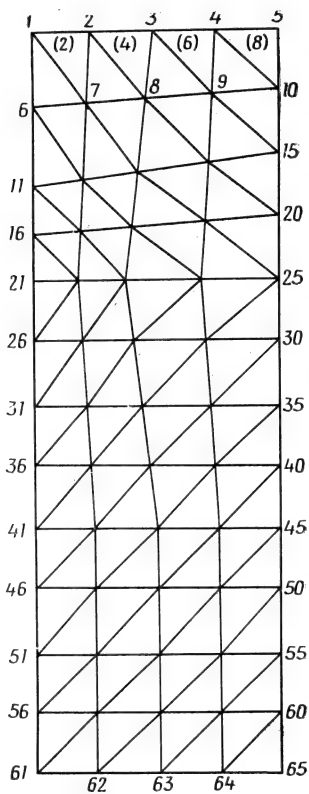
Исходная информация может быть получена с использованием программы GRID. Квадратные области, использованные для получения элементов, показаны на фиг. 8.7 вместе с локальными системами координат  $\xi\eta$ . Области выбраны так, чтобы кабель располагался в узле. Такое узловое размещение желательно потому, что кабель может рассматриваться как линейный источник. Узлы 12 и 14 помещены не в средних точках соответствующих сторон, а смещены ближе к узлу 13, так чтобы меньшие по размерам элементы встречались вблизи этого узла. Меньшие элементы здесь необходимы потому, что именно в области, окружающей этот узел, градиенты температуры максимальны по величине. Окончательное разбиение, которое содержит 65 узлов и 96 элементов, показано на фиг. 8.8. Кабелю при этом соответствует узел 21.

Второй, четвертый, шестой и восьмой элементы подвержены конвективному теплообмену, причем каждый вдоль второй стороны. В связи с этим в 75-м столбце перфокарт с исходными данными для указанных четырех элементов должно быть пробито число 2.

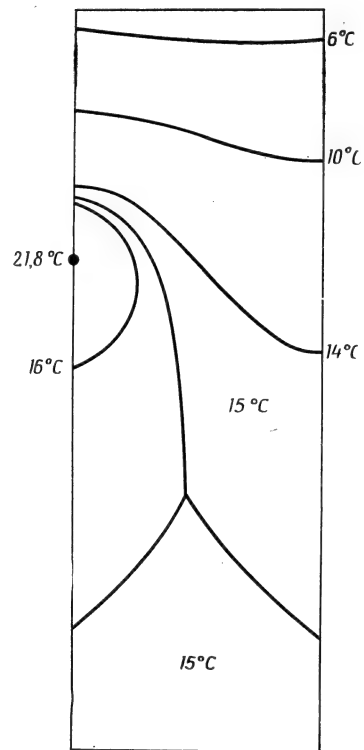
Числовое значение интенсивности линейного источника ставится непосредственно в вектор-столбец  $\{F\}$ . Число 100 будет поставлено в 21-ю строку, поскольку рассматривается только половина области, окружающей кабель. Это значение приписывается составляющей  $F_{21}$ , так как источник расположен в 21-м узле окончательного разбиения.



Фиг. 8.7. Четырехугольные зоны, используемые в программе GRID для разбиения области на элементы.



Фиг. 8.8. Окончательное разбиение области на элементы и номера узлов.



Фиг. 8.9. Линии равных значений температуры в рассматриваемой области.

Окончательные узловые значения и линии равных значений температуры приведены на фиг. 8.9. Эта задача будет рассмотрена вновь в гл. 16.

## Задачи

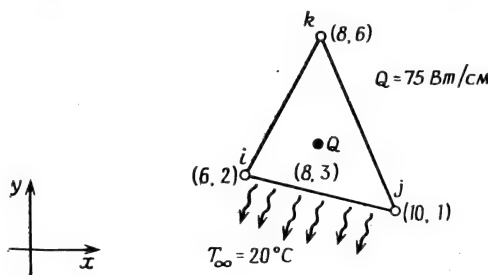
62. Вычислите распределение температуры для стержня в задаче 59, если его диаметр изменяется линейно от 1,5 см на конце, заделанном в стену, до 0,5 см на свободном конце.

63. Проверьте правильность вычисления поверхностного интеграла (8.46б).

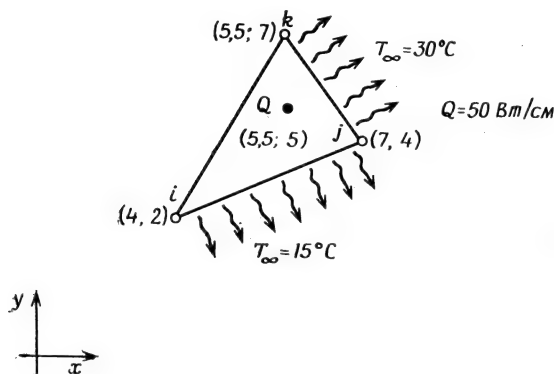
64. Убедитесь в правильности формулы (8.49в).

65. Вычислите объемный интеграл  $\int [B]^T [D] [B] dV$ , если коэффициент теплопроводности  $K_{xx}$  меняется линейно между  $i$ -м и  $j$ -м узлами одномерного элемента.

66—69. Составьте матрицы элемента для изображенных ниже элементов. Коэффициенты теплопроводности в каждом случае

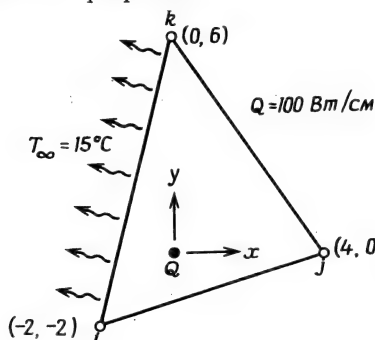


К задаче 66.

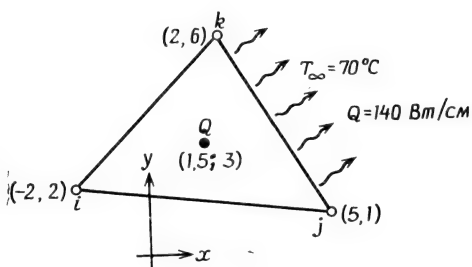


К задаче 67.

считать равными  $K_{xx} = K_{yy} = 15$  Вт/(см·К), а коэффициент теплообмена  $h = 20$  Вт/(см<sup>2</sup>·К). Другие необходимые величины приведены на графиках.



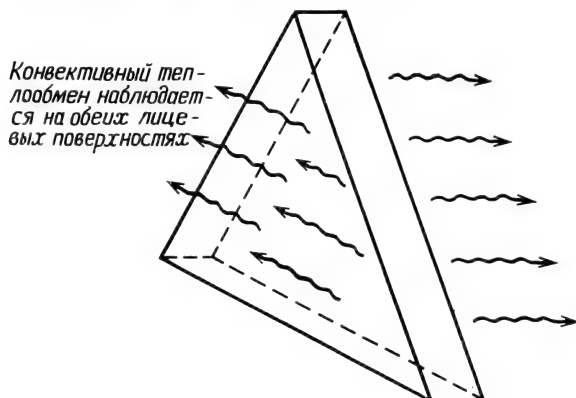
К задаче 68.



К задаче 69.

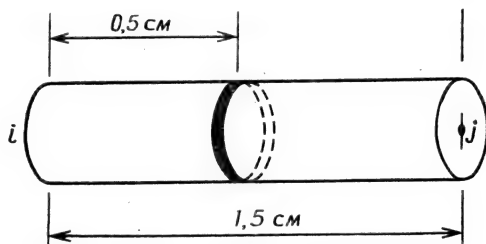
70. Некоторые элементы конструкций имеют двумерное распределение температуры  $T(x, y)$ . Эти элементы достаточно тонкие, так что можно пренебречь изменением их температуры по толщине (в направлении  $z$ ). Для конструкций такого типа явление теплообмена наблюдается в значительно большей степени вдоль лицевых поверхностей элементов, чем по ограничивающим их кромкам. Вычислите поверхностные интегралы, которые входят в  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  для двумерного симплекс-элемента, если потери тепла происходят путем конвекции, как показано на рисунке.

71. Источник тепла имеет форму тонкого диска, расположенного на расстоянии 0,5 см от  $i$ -го узла одномерного элемента, изображенного ниже. Определите распределение по узлам элемента тепла от источника, если его мощность равна 50 Вт.



К задаче 70.

72. Вычислите поверхностные интегралы, которые входят в  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$ , если коэффициент теплообмена меняется линейно между узлами  $i$  и  $j$  одномерного симплекс-элемента. Коэффици-



К задаче 71.

циенты теплообмена в узлах  $i$  и  $j$  обозначьте через  $h_i$  и  $h_j$ ;  $h_i$  предполагается отличным от нуля.

73. Рассмотрите задачу 72 для стороны между узлами  $i$  и  $k$  двумерного симплекс-элемента.

74. Коэффициент теплопроводности линейного одномерного элемента представлен кусочно-постоянной функцией равной значению  $K_1$  слева от точки  $X_0$  и значению  $K_2$  справа от  $X_0$ . С помощью ступенчатой функции  $h(x-a)$  коэффициент теплопроводности  $K_{xx}$  может быть записан аналитически в виде

$$K_{xx} = K_1[1 - h(x - X_0)] + K_2[h(x - X_0)].$$

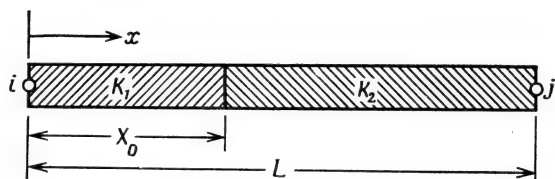
Вычислите матрицу элемента  $[k^{(e)}]$ , если элемент имеет длину  $L$ . Предполагается, что узел  $i$  расположен в точке  $x=0$ .

75—79. Используя программу TDHEAT, рассчитайте распределение температуры в двумерных телах, изображенных ниже. Для получения исходных данных об элементе используйте программу GRID.

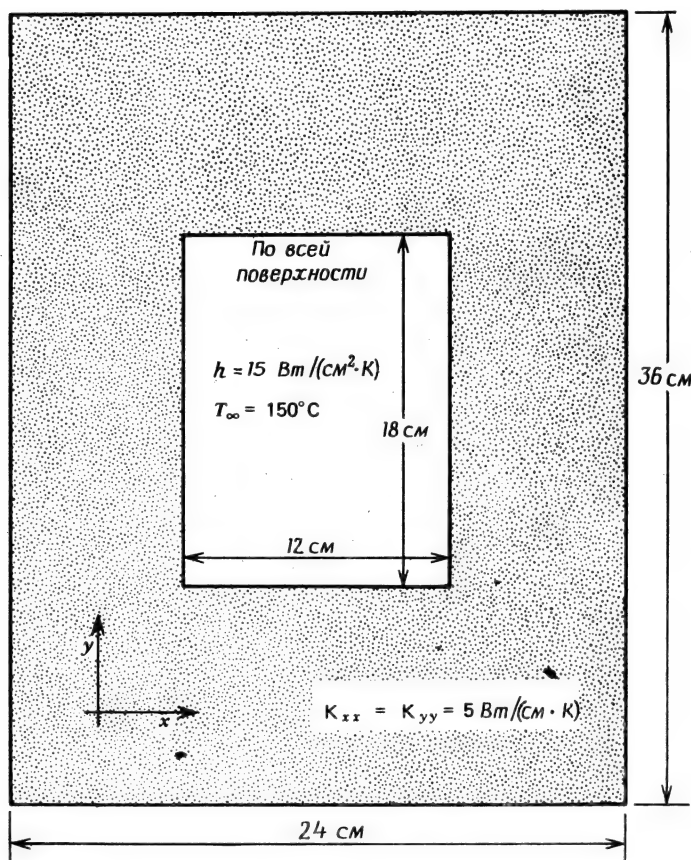
80. Главные оси инерции элемента, показанного ниже, повернуты на  $30^\circ$  относительно системы координат  $xy$ . Коэффициенты теплопроводности, соответствующие этим направлениям, равны  $2K_{ss} = K_{tt} = 30$  Вт/см·К. Составьте матрицу  $[k^{(e)}]$ .

81. Модифицируйте программу TDHEAT так, чтобы ее можно было использовать для вычисления распределения температуры в одномерном стержне. Проверьте программу, решив задачи 59 и 62.

82. Модифицируйте программу TDHEAT, представленную в гл. 18, так, чтобы она могла обрабатывать более одного набора характеристик материала. Используйте модифицированную программу для определения распределения температуры в теле, изображенном ниже.



К задаче 74.

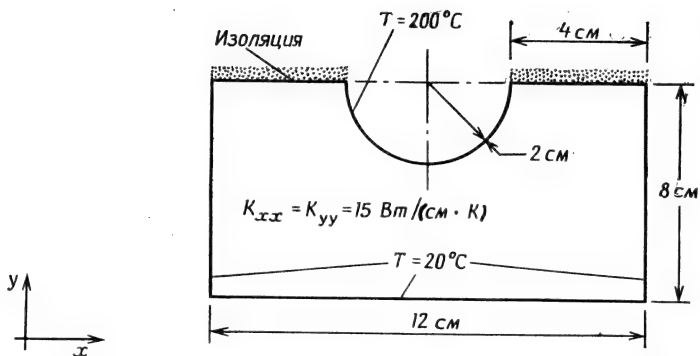


На внешней  
поверхности

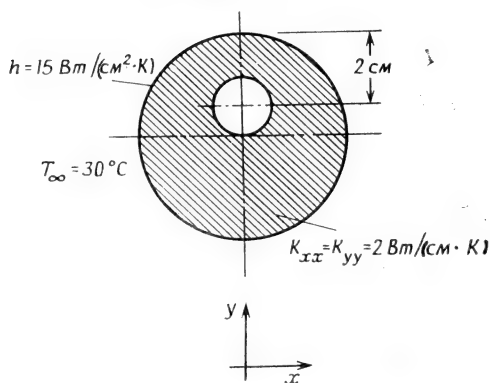
$$h = 5 \text{ W/(cm}^2 \cdot \text{K)}$$

$$T_\infty = 30^\circ \text{C}$$

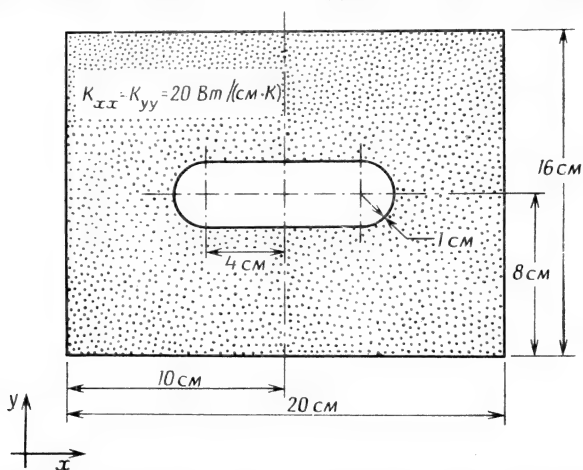
К задаче 75



К задаче 76.



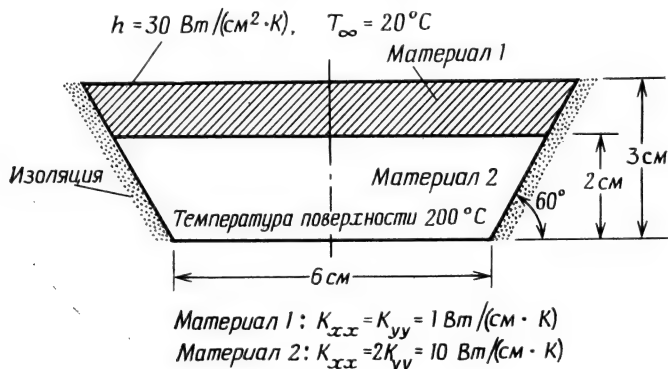
К задаче 77. На внутренней границе цилиндра температура  $140^\circ\text{C}$ . Внутренний диаметр цилиндра 2 см. Наружный диаметр цилиндра 8 см.



К задаче 78. Всюду на внешней границе температура  $20^\circ\text{C}$ . Температура внутри полости  $100^\circ\text{C}$ .



83. Рассмотрите изменения, которые должны быть внесены в программу TDHEAT с тем, чтобы можно было анализировать анизотропные материалы. Внесите конкретные изменения в програм-



К задаче 82.

му, связанные с включением в нее формул преобразования координат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplan W., Operational Methods for Linear Systems, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
2. Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed., Intext Educational Publishers, N. Y., 1973.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Meyers G. E., Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill, N. Y., 1971.
- Visser W., A Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1965.
- Wilson E. L., Nickell R. E., Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, *Nuclear Engineering and Design*, 4, 276—286 (1966).
- Zienkiewicz O. C., Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 9

### ГИДРОМЕХАНИКА, БЕЗВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ

Безвихревое течение идеальной жидкости рассматривается достаточно широко потому, что при этом могут быть решены многие важные физические задачи, такие, как обтекание углов, плотин, несущих поверхностей самолета, различных конструкций. Идеальное безвихревое течение представляет собой некоторое приближение к реальному физическому процессу. При этом предполагается, что между жидкостью и обтекаемой поверхностью нет трения (идеальная жидкость) и вращательное движение частиц жидкости отсутствует (безвихревое течение).

Поток воды в грунте также может быть достаточно тщательно изучен в предположении безвихревого течения. Анализ течения грунтовых вод является важным аспектом в региональном планировании, поскольку снабжение водой многих районов внутри страны полностью или частично связано с грунтовыми водами. Течение грунтовых вод через дамбы и под ними, так же как и по подпочвенным дренажным каналам может быть изучено с помощью этой теории.

Все задачи, включающие рассмотрение безвихревого течения, могут быть решены с помощью метода конечных элементов, так как эти задачи описываются квазигармоническим уравнением (5.1) с граничными условиями (5.2) и (5.3).

#### 9.1. Двумерный случай течения грунтовых вод

Дифференциальное уравнение в частных производных для ограниченного водоносного слоя с течением в горизонтальной плоскости  $(x, y)$  имеет вид

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0, \quad (9.1)$$

где  $K_{xx}$  и  $K_{yy}$  — коэффициенты фильтрации [ $\text{м}^3/(\text{сут} \cdot \text{м}^2)$  или  $\text{м}/\text{сут}$ ];  $\varphi$  — пьезометрический напор, измеряемый в метрах от нижней границы водоносного слоя;  $Q$  — потери воды ( $\text{м}^3/\text{сут}$ ). Выкачивание воды соответствует отрицательной величине  $Q$ .

Граничные условия записываются как

$$\varphi = \varphi_B \quad (9.2)$$

и (или)

$$K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + q = 0. \quad (9.3)$$

Слагаемое  $q$  в формуле (9.3) представляет поток воды, движущейся из области через границу. Единицей измерения этого количества просочившейся воды является м<sup>3</sup>/сут.

Приведенные выше уравнения идентичны уравнениям, которые использовались при рассмотрении кручения и переноса тепла. Поэтому в данном случае применимы матрицы, полученные в предыдущих главах. Из-за отсутствия члена  $h(\varphi - \varphi_B)$ , описывающего конвекцию в формуле (9.3), определяющие элемент соотношения в задаче о грунтовых водах менее сложные, чем подобные соотношения для задач переноса тепла.

Матрицы элемента составляются с помощью формул

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV$$

и

$$\{f^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS.$$

Используя результаты, полученные в гл. 8, можно сразу же записать

$$[k^{(e)}] = \frac{K_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (9.4)$$

где  $A$  — площадь элемента. Вектор нагрузки для элемента имеет вид

$$\{f^{(e)}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - q \frac{\mathcal{L}_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9.5)$$

В первом слагаемом (9.5) предполагается, что выкачивание или потери воды постоянны по элементу. При изучении водоносного слоя обычно рассматриваются площади больших размеров (порядка квадратных километров), что делает возможным локализовать насос в узле и трактовать его как линейный источник. Результаты обсуждения линейных источников в разд. 8.6 применимы и для рассмотрения выкачивания грунтовых вод.

Второй член в (9.5) связан с просачиванием воды в элемент или из него наружу. Просачивание может наблюдаться вдоль лю-

бой из сторон элемента, поэтому существуют три формы записи поверхностного интеграла: по одной для каждой из сторон треугольного элемента. Форма записи, представленная формулой (9.5), соответствует стороне элемента между узлами  $i$  и  $j$ , длина которой равна  $L_{ij}$ . Две другие в точности совпадают с теми, что даны в (8.49).

Во многих задачах о течении грунтовых вод граница водоносного слоя предполагается водонепроницаемой. Это обстоятельство влияет на решение таким же образом, как наличие теплоизолированной границы в задаче о переносе тепла. Если при этом для решения используется метод конечных элементов, то никакого специального рассмотрения не требуется, так как условие непроницаемости границы  $\partial\varphi/\partial n=0$  входит в функционал, который минимизируется для получения окончательной системы уравнений.

Анизотропные материалы учитываются точно так же, как это делается в разд. 8.5. Соотношения для элемента должны быть получены при использовании связанной с элементом системы координат, оси которой параллельны главным осям инерции.

Результанты элемента содержат компоненты скорости течения:

$$\begin{aligned} V_x &= -K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ V_y &= -K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где  $V_x$  и  $V_y$  — скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно.

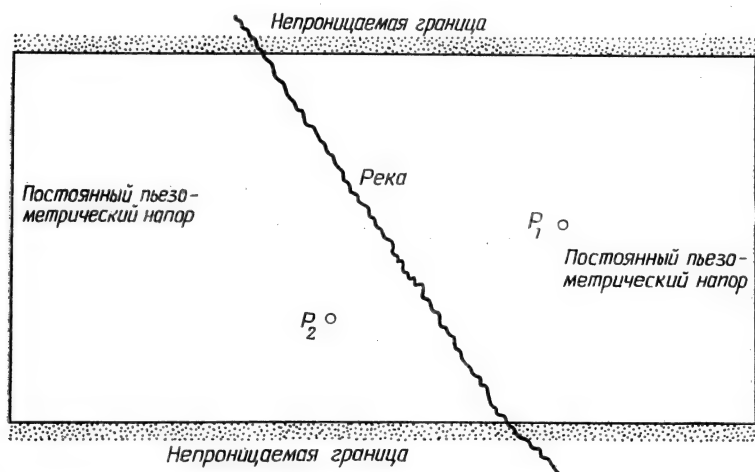
## 9.2. Рассмотрение задачи о течении грунтовых вод с помощью ЭВМ

Решение двумерной задачи о течении грунтовых вод с помощью ЭВМ можно провести в соответствии с блок-схемой, представленной на фиг. 7.3, без каких-либо изменений. При этом нет необходимости включать в программу вычисление компонент вектора нагрузки для элемента по формуле (9.5), потому что это легко можно сделать вручную и приписать их значения соответствующим узлам в процессе модификации окончательной системы уравнений. Программа вычислений для решения двумерной задачи о течении грунтовых вод представлена в разд. 18.6. Эта программа была использована для решения следующей задачи о водоносном слое.

### 9.2.1. Постановка задачи

На фиг. 9.1 изображен небольшой региональный водоносный слой. Это прямоугольник со сторонами длиной 1500 и 3000 м, ограниченный вдоль длинных сторон водонепроницаемым материа-

лом. Просачивание воды в область с левой и правой границ достаточно велико, чтобы поддерживать вдоль этих границ постоянное значение пьезометрического напора величиной 200 м. Вода из реки просачивается в водоносный слой со скоростью  $0,24 \text{ м}^3/\text{сут}$  по



Фиг. 9.1. Региональный водоносный слой.

длине потока. Кроме того, два насоса, расположенные в точках (2000, 830) и (1100, 600), выкачивают воду из водоносного слоя. Коэффициенты фильтрации равны  $K_{xx} = 40 \text{ м}^3/(\text{сут} \cdot \text{м}^2)$  и  $K_{yy} = 20 \text{ м}^3/(\text{сут} \cdot \text{м}^2)$ . Мощности насосов  $P_1 = 1200 \text{ м}^3/\text{сут}$  и  $P_2 = 2400 \text{ м}^3/\text{сут}$ .

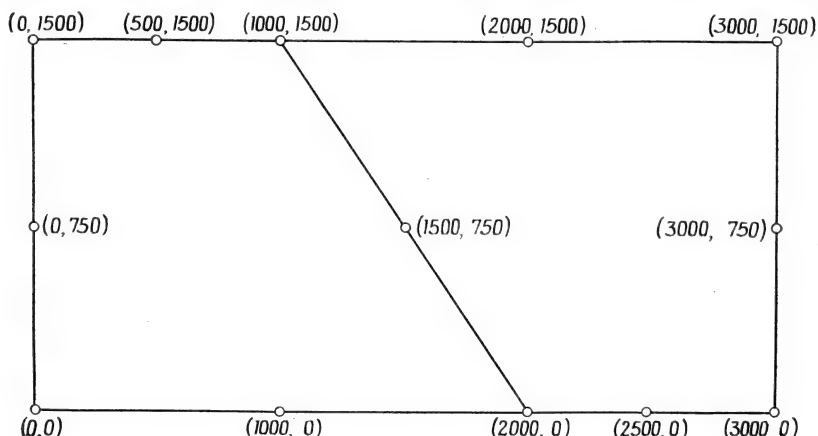
Требуется определить линии постоянного потенциала, считая течение установившимся.

### 9.2.2. Решение с помощью ЭВМ

Разбиение области на элементы было выполнено с помощью программы GRID, генерирующей исходные данные об элементе. Расположение узлов, которые были использованы при этом для задания базисных областей, показано на фиг. 9.2. Окончательная сеть элементов и номера их узлов представлены на фиг. 9.3. Река была использована как граница между базисными областями для получения элементов. Так как обычно в задачах о течении грунтовых вод не встречается значительных изменений величины  $\phi$ , то для разбиения были использованы элементы больших размеров.

Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо вычислить два множества узловых величин: узловые значения количе-

ства просачивающейся воды из реки и узловые значения для количества воды, выкачанной насосами. Длина реки составляет  $\sqrt{(2000-1000)^2 + 1500^2} = 1802,8$  м. Полное количество просачивающейся воды равно  $q = 1802,8 \cdot 0,24 = 432,67$  м<sup>3</sup>/сут. Вдоль реки рас-



Фиг. 9.2. Четырехугольные зоны, используемые программой GRID для разбиения области на треугольные элементы.

стояние между узлами одинаково и просачивание между соседними узлами характеризуется величиной

$$q = -\frac{432,67}{4} = -108,17 \text{ м}^3/\text{сут.}$$

При этом на каждый узел приходится половина этой величины. Величина 432,67 распределяется по узлам, расположенным вдоль реки следующим образом:

узел 21:	54,08 м <sup>3</sup> /сут,
узел 22:	108,17 м <sup>3</sup> /сут,
узел 23:	108,17 м <sup>3</sup> /сут,
узел 24:	108,17 м <sup>3</sup> /сут,
узел 25:	54,08 м <sup>3</sup> /сут.

Величины положительны, потому что в (9.5) стоит знак минус.

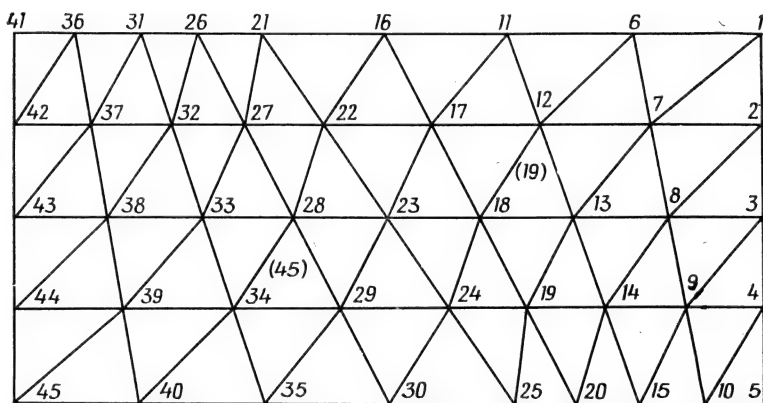
Насосы представляют собой точечные источники, причем ни один из них не располагается в узле. Выкачанная насосом вода распределяется по узлам элемента, в котором размещается насос. Это распределение может быть определено с помощью соотношений, приведенных в гл. 8.6. В эти соотношения в качестве весовых

коэффициентов входят значения функций форм данного элемента, вычисляемые по координатам точечного источника.

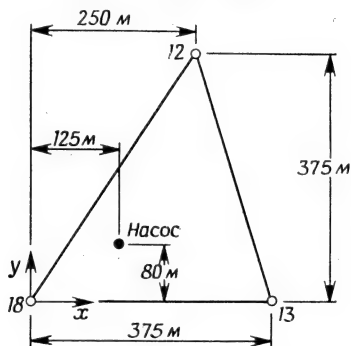
Первый насос расположен в точке (2000, 830) внутри элемента, ограниченного узлами 18, 13 и 12. Используя локальную систему координат, как показано на фиг. 9.4, получаем

$$N_{18} = \left[ 1 - \frac{x}{375} - \frac{y}{3 \cdot 375} \right], \quad N_{13} = \left[ \frac{x}{3,75} - \frac{250}{(375)^2} y \right],$$

$$N_{12} = \left[ \frac{y}{375} \right].$$



Фиг. 9.3. Область регионального водоносного слоя, разбитого на элементы; указаны номера узлов.



Фиг. 9.4. Местная система координат; указаны размеры 19-го элемента.

В указанной системе координат точке расположения насоса соответствует пара чисел (125, 80). Подстановка этих координат в функции формы дает

$$N_{18} = 0,596, \quad N_{13} = 0,191 \quad \text{и} \quad N_{12} = 0,213.$$

Значениям узловых сил соответствуют значения функций формы, умноженные на скорость выкачивания воды:

$$\text{узел 18: } Q = 0,596 (-1200) = -715,2 \text{ м}^3/\text{сут},$$

$$\text{узел 13: } Q = 0,191 (-1200) = -229,2 \text{ м}^3/\text{сут},$$

$$\text{узел 12: } Q = 0,213 (-1200) = -255,6 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Отрицательные значения выбраны потому, что вода выкачивается из водоносного слоя.

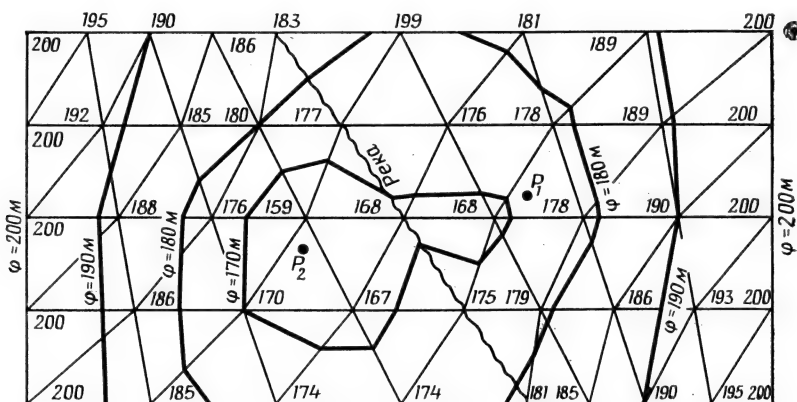
Насосу, расположенному в 45-м элементе, соответствуют следующие узловые значения:

$$\text{узел 34: } Q = -549,6 \text{ м}^3/\text{сут},$$

$$\text{узел 29: } Q = -410,4 \text{ м}^3/\text{сут},$$

$$\text{узел 28: } Q = -1440 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

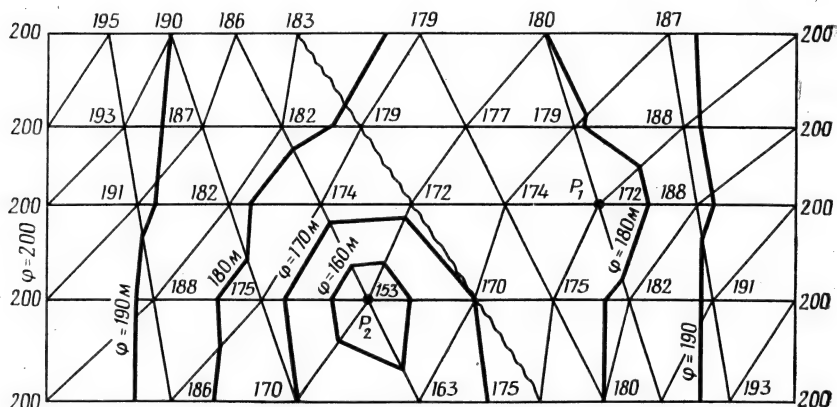
Узловые значения, связанные с количеством воды, просачивающейся из реки и выкачанной насосами, подставляются непосредственно в вектор-столбец  $\{F\}$ . Эти значения и только они являются ненулевыми членами  $\{F\}$ . Окончательная система уравнений должна быть преобразована с учетом заданных граничных значений в узлах с 1 по 5 и с 41 по 45.



Фиг. 9.5. Узловые значения и линии постоянных значений  $\phi$  в региональном водоносном слое.

Решение преобразованной системы уравнений приводит к узловым значениям для  $\{\Phi\}$ , указанным на фиг. 9.5, где изображены также линии равного уровня для  $\phi$ . В связи с тем, что насосы были расположены не в узловых точках, для  $\phi$  получились значения, которые не отражают действительного положения в точке разме-

щения насоса. Как видно из анализа результатов в окрестности точки  $P_2$ , наименьшее значение  $\varphi$  имеет место в узле 28, т. е. в узле, на который приходится наибольшая порция воды, вытекающей из  $P_2$ .



Фиг. 9.6. Узловые значения и линии постоянных значений  $\varphi$ , соответствующие разбиению области на элементы, при котором насосы располагаются в узлах.

На фиг. 9.6 представлено решение, которое получается при таком разбиении области, когда насосы располагаются в узловых точках. Наименьшее значение  $\varphi$  в окрестности насоса оказывается при этом в точке расположения насоса.

### 9.3. Безвихревое течение идеальной жидкости

Безвихревое течение идеальной жидкости можно рассмотреть, используя функцию тока  $\psi$  или функцию потенциала скоростей  $\varphi$ . Уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (9.7)$$

Скорость течения выражается через  $\psi(x, y)$  формулами

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9.8)$$

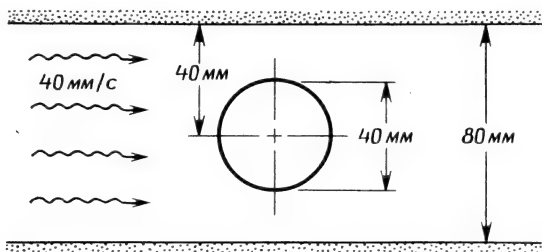
$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Объемный расход жидкости определяется разностью значений функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , соответствующих двум соседним линиям тока:

$$Q = \psi_2 - \psi_1. \quad (9.9)$$

Здесь  $Q$  — расход жидкости на единицу глубины в направлении  $z$ . Линии тока характеризуются также тем, что в перпендикулярном к ним направлении отсутствует течение жидкости.

При обтекании тела идеальной жидкостью считается, что жидкость не проникает в тело и не отходит от него, образуя пустоты.



Фиг. 9.7. Обтекание цилиндрического тела.

Это приводит к следующему условию на граничной поверхности: компонента скорости течения жидкости, нормальная к граничной поверхности, совпадает со скоростью поверхности в этом направлении [2]<sup>1)</sup>. Для неподвижной границы приведенное условие означает отсутствие течения, перпендикулярного к этой границе, поэтому на неподвижной границе перпендикулярная к ней компонента скорости течения равна нулю.

В связи с вышеизложенным можно заключить, что неподвижные границы являются линиями тока, поскольку в точках линий тока скорость течения направлена по касательной к ним. Линия симметрии, параллельная направлению течения, также будет линией тока. Определение значений  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , ... для различных линий тока иллюстрируется далее на примере задачи обтекания цилиндра (фиг. 9.7). Числовые значения  $\psi$ , соответствующие граничным линиям тока, должны быть при этом определены до решения задачи.

Задача о безвихревом течении может быть сформулирована с использованием потенциала скоростей. Дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (9.10)$$

<sup>1)</sup> См. также П. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, изд-во «Наука», М., 1973. — Прим. ред.

Компоненты скорости определяются следующими формулами:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9.11)$$

Компонента скорости, нормальная к неподвижной границе,

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y = 0, \quad (9.12)$$

где  $l_x$  и  $l_y$  — направляющие косинусы единичной нормали. Соотношение (9.12) идентично условиям непроницаемости для водонепроницаемого слоя при рассмотрении грунтовых вод или для теплоизолированной границы при изучении переноса тепла. Это соотношение уже использовалось в вариационной постановке задачи.

При решении уравнения (9.10) с граничным условием (9.12) возникает дополнительная трудность. Решение уравнения (9.10) не единственно. Матрица  $[K]$  системы сингулярна. Эта трудность может быть преодолена выбором одного узла и заданием значения  $\varphi$  в этом узле. Так как скорости определяются дифференцированием функций  $\varphi$ , то значение  $\varphi$  в выбранном узле всегда можно брать равным нулю.

Применение метода конечных элементов при рассмотрении безвихревого течения идеальной жидкости иллюстрируется на задаче обтекания цилиндра (фиг. 9.7). Применение вышеизложенных понятий при решении задачи обтекания многих тел обсуждается в работах [1, 3].

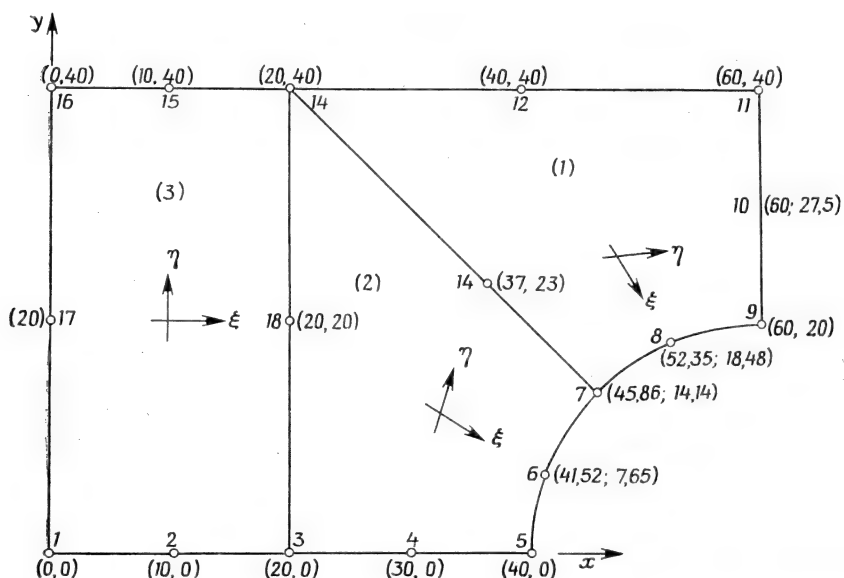
### 9.3.1. Постановка задачи

Определить линии тока для течения вокруг цилиндрического тела диаметром 40 мм, центр которого расположен посередине между двумя параллельными стенками. Расстояние между стенками равно 80 мм. На достаточном расстоянии от цилиндра однородный поток жидкости имеет скорость 40 мм/с.

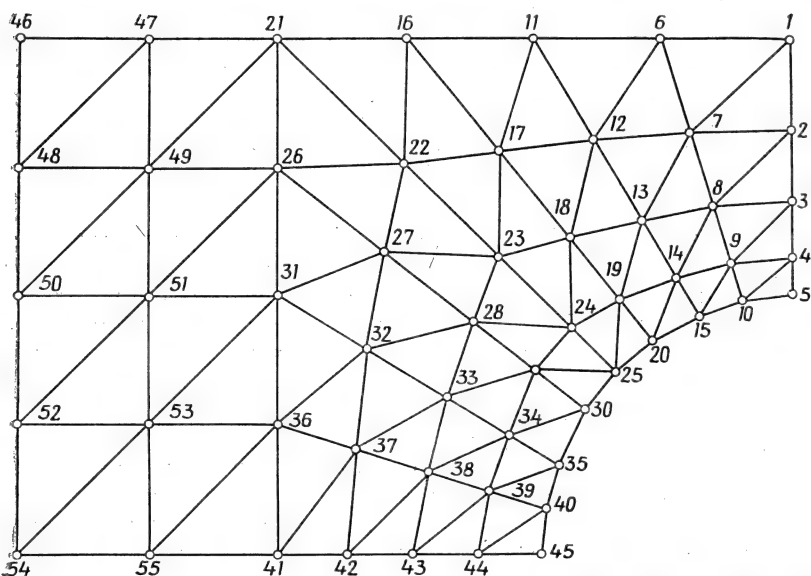
### 9.3.2. Решение на ЭВМ

На фиг. 9.8 показано разбиение области на три базисные подобласти, которое было использовано для получения исходной информации об элементах. Окончательное разбиение на элементы и номера узлов показаны на фиг. 9.9.

Задание граничных условий на линиях тока не представляет труда. Горизонтальная ось симметрии и верхняя граница области



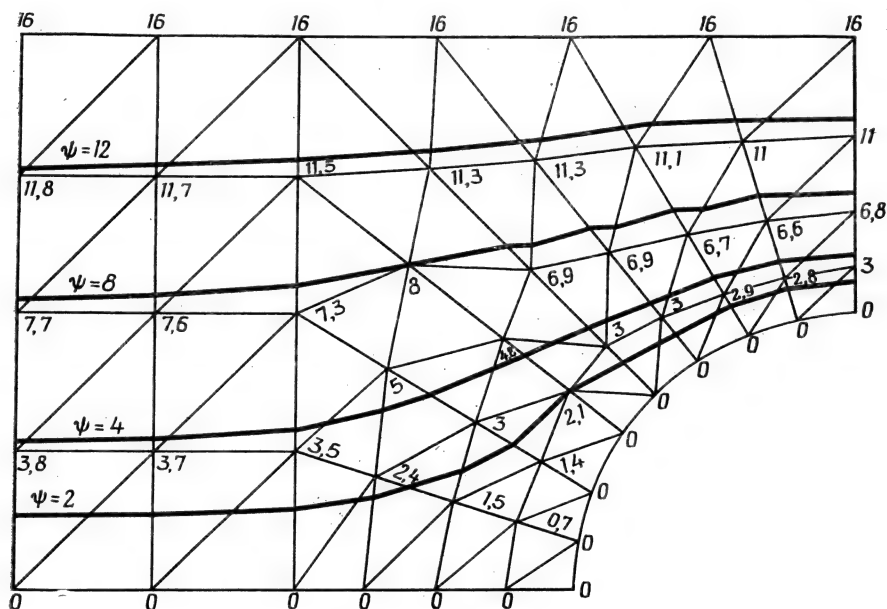
Фиг. 9.8. Четырехугольные зоны, используемые программой GRID для разбиения области на треугольные элементы.



Фиг. 9.9. Область, разбитая на элементы, в задаче о безвихревом потоке; указаны номера узлов.

являются линиями тока. Действительно, в направлении, нормальном к этим линиям, отсутствует течение. По тем же соображениям граничная поверхность цилиндра также является линией тока.

Числовое значение  $\psi$  вдоль линий тока может быть выбрано произвольно, так как объемный расход жидкости зависит от разности числовых значений  $\psi$ , соответствующим двум линиям тока.



Фиг. 9.10. Узловые значения  $\psi$  и линии тока.

Пусть линии тока, образованной осью симметрии и поверхностью цилиндра, соответствует значение  $\psi=0$ . Эту линию назовем нулевой линией тока. Числовое значение  $\psi$  для верхней границы может быть любым, отличным от нуля числом (нулевое значение будет означать отсутствие течения). Выберем, однако, величину, имеющую определенный физический смысл. Рассмотрим полный объемный расход жидкости:

$$Q = V_x A = (40 \text{ мм/с}) (40 \text{ мм}^2) = 1600 \text{ мм}^3/\text{с}.$$

Если задать на верхней границе  $\psi$ , равное 16, то разность значений  $\psi$ , соответствующих двум произвольным линиям тока, умноженная на 100, будет давать объемный расход жидкости.

Результаты расчетов, соответствующие такому выбору граничных условий, представлены на фиг. 9.10 в виде узловых значений  $\psi$ . Здесь изображены также линии тока, соответствующие  $\psi=0, 2$ ,

4, 8, 12 и 16. На левой вертикальной границе области не получена однородная картина течения, что объясняется недостаточным удалением этой границы от цилиндра вверх по течению. Пытаясь применить конечную модель для решения неограниченной задачи, нужно выбирать достаточно большую область для анализа.

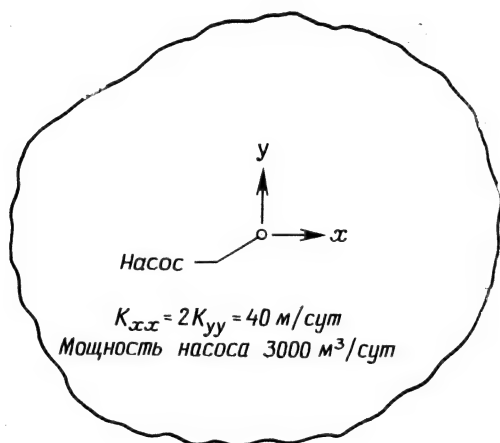
## 9.4. Заключение

Метод конечных элементов широко применяется при рассмотрении задач течения жидкости и те две задачи, которые приведены в этой главе, служат всего лишь иллюстрацией того, как этот метод может использоваться. Более полный обзор исследований в этом направлении представлен в трудах международной конференции по использованию метода конечных элементов при решении задач течения жидкости [4].

Метод конечных элементов применяется также при рассмотрении течения газа, течения по поверхности и для решения уравнений Навье—Стокса. Другой важный класс задач, которые могут быть решены этим методом, включает задачи со свободной поверхностью, такие, как обтекание плотины или грунтовой поверхности в случае грунтовых вод. Для решения таких задач требуется итерационный процесс, который включает модификацию сети разбиения области на элементы после выполнения каждой итерации.

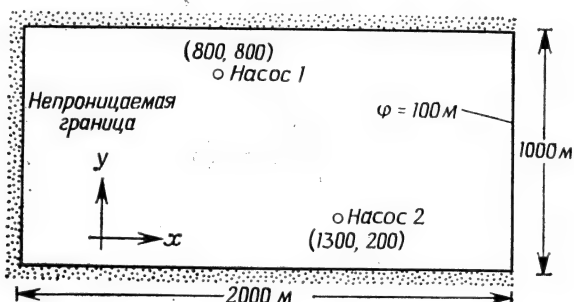
## Задачи

Используйте программу FLDMCH, представленную в гл. 18, для анализа следующих задач.



К задаче 84.  $f=300$  м на достаточном расстоянии от насоса.

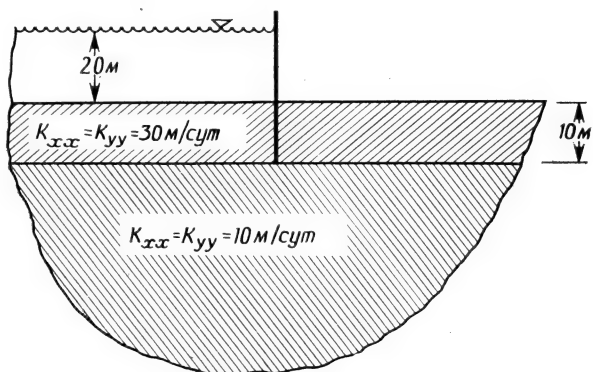
84—85. Определите понижение уровня воды в точках расположения насосов и постройте графики эквипотенциальных линий для изображенных ниже областей.



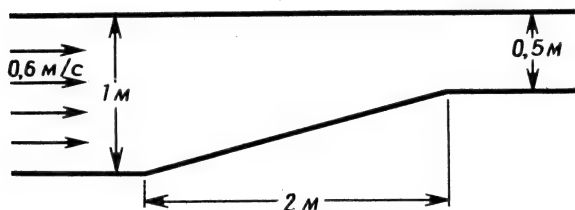
К задаче 85.  $K_{xx} = K_{yy} = 45$  м/сут.

Мощность насосов: 600 м³/сут (насос 1), 400 м³/сут (насос 2).

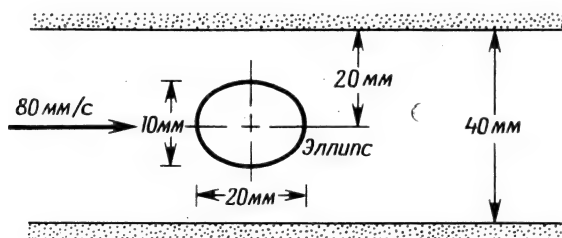
86—88. Постройте графики линий постоянных значений  $\varphi$  и (или)  $\psi$  для изображенных ниже областей.



К задаче 86.



К задаче 87.



К задаче 88.

## ЛИТЕРАТУРА

1. deVries G., Norrie D. H., The Application of the Finite-Element Technique to Potential Flow Problems, Trans. ASME, Series E, *J. Appl. Mechanics*, 38, 798—802 (1971).
2. Duncan W. J., Thom A. S., Young A. D., Mechanics of Fluids, 2-nd ed., Am. Elsevier Publ. Co., N. Y., 1970.
3. Oden J. T., Zienkiewicz O. C., Gallagher R. H., Taylor C., Finite Element Methods in Flow Problems, The Univ. of Alabama, Huntsville Press, 1974.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ikegawa M., Washizu K., Finite Element Method Applied to Analysis of Flow over a Spillway Crest, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 6, 179—189 (1973).

Martin H. C., Finite Element Analysis of Fluid Flows, Proc. of Second Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1968.

Newman S. P., Witherspoon P. A., Finite Element Method of Analyzing Steady State Seepage with a Free Surface, *Water Resources Research*, 6, 3, 889—896 (1970).

## Глава 10

### РАДИАЛЬНЫЕ И ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ряд важных физических двумерных и трехмерных задач может быть решен с использованием одномерных и двумерных элементов. Эти задачи обладают осевой или центральной симметрией. Задача о радиальном потоке тепла через концентрические цилиндры с различными коэффициентами теплопроводности является одним из примеров таких задач. В достаточно длинном цилиндре поток тепла распространяется как в радиальном, так и в осевом направлениях. Поток тепла не зависит от азимутального угла  $\theta$ , если граничные условия не зависят от  $\theta$ . Другим примером задачи с осевой симметрией является задача о плоском течении воды к скважине. В этом случае характеристики течения не должны зависеть от угла  $\theta$ . Многие трехмерные задачи теории поля обладают осевой симметрией. Большинство из рассмотренных здесь задач связано с переносом тепла, впрочем течение воды к скважине в пористой среде — пример важной задачи гидродинамики.

Методика решения двумерных и трехмерных задач, которая обсуждалась ранее, изменяется в случае наличия симметрии. Главное изменение связано с порядком используемого элемента. Двумерные симметрические задачи становятся одномерными, а трехмерные осесимметрические задачи решаются с использованием двумерного элемента.

Вариационная формулировка задач и вычисление соответствующих интегралов по площади элемента настолько отличаются от того, что было описано в предыдущих главах, что требуют специального рассмотрения, которое будет дано в этой главе.

#### 10.1. Симметрические двумерные задачи теории поля

Рассмотрим дифференциальное уравнение для квазистатических задач теории поля в цилиндрических координатах [1]

$$K_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q = 0 \quad (10.1)$$

с граничными условиями

$$\Phi = \Phi_B \quad (10.2)$$

и

$$K_{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} l_r + K_{\theta\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} l_\theta + K_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} l_z + q + h(\Phi - \Phi_\infty) = 0. \quad (10.3)$$

Члены, связанные с координатой  $z$ , не учитываются в двумерной задаче. Наличие симметрии означает, что  $\Phi$  не зависит от  $\theta$  и соответствующие члены в приведенных соотношениях должны быть отброшены.

Запишем дифференциальное уравнение для симметрической двумерной задачи теории поля

$$K_{rr} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + Q = 0 \quad (10.4)$$

с граничными условиями

$$\Phi = \Phi_B \quad (10.5)$$

и

$$K_{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} l_r + q + h(\Phi - \Phi_\infty) = 0. \quad (10.6)$$

Условия (10.5) и (10.6) могут быть заданы одновременно, но на разных частях границы.

Вариационная формулировка, соответствующая уравнению (10.4) и граничным условиям, связана с функционалом

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ r K_{rr} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - 2r Q \Phi \right] dV + \\ + \int_{S_1} q \Phi dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\Phi^2 - 2\Phi \Phi_\infty + \Phi_\infty^2] dS. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Поверхностные интегралы в (10.7) идентичны интегралам в формуле (5.35), тогда как объемный интеграл может быть записан в форме, идентичной соответствующему интегралу в (5.35), если  $[D]$  определить как  $[r K_{rr}]$  и  $Q$  в (5.35) заменить на  $rQ$ . После этих подстановок минимизация (10.7) может быть осуществлена так же, как в одномерном случае, представленном в (5.35), и приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = [k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}, \quad (10.8)$$

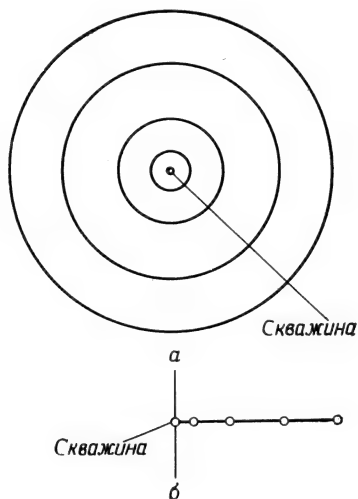
где

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_1} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS$$

и

$$\{f^{(e)}\} = - \int_V (rQ) [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2} h\varphi_{\infty} [N^{(e)}]^T dS.$$

Разбиение области на элементы в данном случае показано на фиг. 10.1,а. Каждый элемент ограничивается концентрическими окружностями. Значение  $\varphi$  внутри каждого элемента не зависит от угла  $\theta$ , и множество концентрических окружностей может быть



Фиг. 10.1. Одномерные элементы, используемые для моделирования радиального течения воды к скважине.

заменено линейными элементами, изображенными на фиг. 10.1,б.

Функции формы для одномерного элемента (3.5), выраженные через радиус  $r$ , имеют вид

$$N_i = \frac{R_j - r}{R_j - R_i} \quad \text{и} \quad N_j = \frac{r - R_i}{R_j - R_i}. \quad (10.9)$$

Переменная  $\varphi$  аппроксимируется зависимостью

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j. \quad (10.10)$$

Матрица градиентов выражается следующим соотношением:

$$[B] = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] = \frac{1}{R_j - R_i} [-1 \quad 1]. \quad (10.11)$$

Вычислить интегралы в (10.8) сравнительно просто. Бесконечно малое изменение объема  $dV$  элемента единичной толщины равно

$$dV = 2\pi r dr. \quad (10.12)$$

Внешнюю поверхность могут иметь только два элемента: элемент на внешней границе и внутренний элемент при наличии полости. В обоих случаях эти поверхности совпадают с узлами и интеграл по поверхности сводится к  $\int dS$ .

Рассмотрим теперь более детально интегралы по элементам, опуская верхний индекс  $(e)$  у всех переменных, кроме  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$ . Вычислим объемный интеграл в  $[k^{(e)}]$ , используя формулы (10.11) и (10.12):

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{2\pi K_{rr}}{L^3} \int_{R_i}^{R_j} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] r^2 dr,$$

где  $K_{rr}$  предполагается постоянным, а  $L = R_j - R_i$  — длина элемента. После умножения и интегрирования будем иметь

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{2\pi K_{rr} (R_j^3 - R_i^3)}{3(R_j - R_i)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Поверхностный интеграл в  $[k^{(e)}]$  имеет вид

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \int_S h \begin{bmatrix} N_i N_i & N_j N_i \\ N_i N_j & N_j N_j \end{bmatrix} dS.$$

Вычислим этот интеграл по внешней поверхности, которая совпадает с  $j$ -м узлом наиболее удаленного от центра элемента. В этом узле функции формы имеют значения  $N_j = 1$  и  $N_i = 0$  и поверхностный интеграл записывается следующим образом:

$$\int_S h [N]^T [N] dS = 2\pi R_j h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Толщина элемента предполагается единичной. Для внутренней поверхности того же элемента тот же самый интеграл имеет вид

$$\int_S h [N]^T [N] dS = 2\pi R_i h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.15)$$

Поверхностные интегралы формулы (10.8) для  $\{f^{(e)}\}$  определяются аналогично.

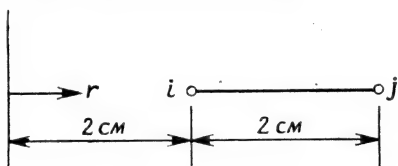
Вычисление объемного интеграла, входящего в  $\{f^{(e)}\}$ , сводится к интегрированию членов, включающих  $r^2$  и  $r^3$ . Запишем окончательный результат

$$\int_V r Q [N]^T dV = \frac{\pi Q}{6 (R_j - R_i)} \left\{ \begin{matrix} (R_j^4 - 4R_j^3 R_i + 3R_i^4) \\ (3R_j^4 - 4R_j^3 R_i + R_i^4) \end{matrix} \right\}. \quad (10.16)$$

Величина  $Q$  теперь не распределяется, как раньше, поровну между узлами, хотя это не столь очевидно из (10.16). Более половины величины  $Q$  приходится на узел  $j$ , потому что радиальная координата возрастает в направлении этого узла. Неравномерное распределение  $Q$  по узлам элемента иллюстрируется на следующем примере.

### Пример

89. Концентрический одномерный элемент с внутренним радиусом 2 см и внешним радиусом 4 см содержит источник тепла интенсивностью 20 Вт/см<sup>3</sup>. Требуется определить, какая часть тепла от этого источника приходится на каждый из двух узлов элемента. Толщину элемента считать единичной.



К задаче 89.

Распределение по узлам выражается формулой

$$\{f^{(e)}\} = \frac{\pi Q}{6 (R_j - R_i)} \left\{ \begin{matrix} (R_j^4 - 4R_j^3 R_i + 3R_i^4) \\ (3R_j^4 - 4R_j^3 R_i + R_i^4) \end{matrix} \right\},$$

где  $R_j = 4$  и  $R_i = 2$  см. Подстановка этих значений дает следующие величины:

$$\{f^{(e)}\} = \frac{\pi \cdot 20}{6 (4 - 2)} \left\{ \begin{matrix} (4^4 - 4 (2)^3 4 + 3 (2)^4) \\ (3 (4)^4 - 4 (4)^3 (2) + 2^4) \end{matrix} \right\} = \frac{20\pi}{12} \left\{ \begin{matrix} 176 \\ 272 \end{matrix} \right\}$$

и

$$\{f^{(e)}\} = \pi \left\{ \begin{matrix} 293,33 \\ 453,33 \end{matrix} \right\}.$$

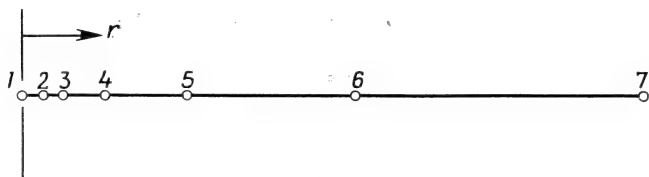
В заключение этого раздела рассмотрим еще один численный пример, который иллюстрирует использование одномерного элемента в задаче о течении грунтовых вод.

### Пример

90. В неограниченном водоносном слое с коэффициентом проницаемости  $20 \text{ м}^3/(\text{ч} \cdot \text{м}^2)$  имеется скважина. Расход воды составляет  $200 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Течение к скважине происходит в радиальном направлении, причем пьезометрический напор на расстоянии 300 м от скважины поддерживается равным 30 м. Определите максимальное понижение уровня воды при установившемся режиме течения.

Радиальные координаты узлов

Узлы	Расстояние, м	Узлы	Расстояние, м
1	0	5	80
2	10	6	160
3	20	7	300
4	40		



К задаче 90.

Для аппроксимации водоносного слоя используем шесть элементов различной длины. Самый короткий элемент расположим вблизи скважины, с удалением от нее длина элементов возрастает. В соответствии с формулой (10.13) запишем матрицу элемента  $[k^{(e)}]$ :

$$[k^{(e)}] = \frac{2\pi K_{rr} (R_j^3 - R_i^3)}{3 (R_j - R_i)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В этой формуле при переходе от элемента к элементу изменяется только отношение  $(R_j^3 - R_i^3)/(R_j - R_i)^2$ . Значения этого отношения для каждого элемента представлены в следующей таблице:

Элемент	$R_i$	$R_j$	$\frac{R_j^3 - R_i^3}{(R_j - R_i)^2}$
1	0	10	10
2	10	20	70
3	20	40	140
4	40	80	280
5	80	160	560
6	160	300	1168,57

Результирующая система уравнений имеет вид

$$\frac{2\pi K_{rr}}{3} \begin{bmatrix} 10 & -10 & & & & \\ -10 & 80 & -70 & & & \\ & -70 & 210 & -140 & & \\ & & -140 & 420 & -280 & \\ & & & -280 & 840 & -560 \\ & & & & -560 & 1728,57 & -1168,57 \\ & & & & & -1168,57 & 1168,57 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Глобальный вектор нагрузки содержит нули, потому что все интегралы, входящие в  $\{f^{(e)}\}$ , равны нулю. Однако в этой системе должны быть отражены два имеющихся в формулировке задачи условия. Во-первых,  $\Phi_7$  — известная величина, равная по условию 30 м. Во-вторых, расход скважины, рассматриваемой как точечный сток, равен  $200 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Поскольку вода покидает водоносный слой, то значение  $-200$  необходимо подставить в  $F_1$ . Окончательная система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 & & & & \\ -10 & 80 & -70 & & & \\ & -70 & 210 & -140 & & \\ & & -140 & 420 & -280 & \\ & & & -280 & 840 & 560 \\ & & & & -560 & 1728,57 & 0 \\ & & & & & 0 & 1168,57 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,77 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 836,88 \\ 836,88 \end{Bmatrix}.$$

Здесь обе части системы разделены на величину  $2\pi K_{rr}/3$ , равную 41,89.

Запишем решение этой системы уравнений

$$[\Phi]^T = [29,39, 29,87, 29,94, 29,97, 29,99, 30,0, 30,0].$$

Максимальное понижение уровня воды равно 0,61 м и достигается в точке, где находится скважина.

## 10.2. Осесимметрические задачи теории поля

Если трехмерное тело обладает геометрической симметрией относительно оси  $z$ , то это тело называют осесимметричным телом. Если к тому же исследуемая физическая величина не зависит от  $\theta$ , то дифференциальное уравнение (10.1) сводится к следующему:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{K_{rr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q = 0. \quad (10.17)$$

Для решения этого двумерного уравнения может быть использован треугольный симплекс-элемент.

Следует еще раз подчеркнуть, что для того, чтобы уравнение (10.17) было справедливо, требуется больше, чем симметрия формы рассматриваемого тела. При несимметричном распределении температуры в осесимметричном теле задачу нельзя считать осесимметрической.

Граничные условия для уравнения (10.17) выражаются формулой (10.2) и следующим соотношением:

$$K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} l_r + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0. \quad (10.18)$$

Вариационная формулировка задачи (10.17) и (10.18) связана с рассмотрением функционала

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ r K_{rr} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + r K_{zz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2r Q \varphi \right] dV + \\ + \int_{S_1} q \varphi dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\varphi - 2\varphi_\infty - \varphi_\infty^2] dS. \quad (10.19)$$

Интегралы, которые входят в основные соотношения, определяющие элементы, в точности совпадают с теми, что выведены в гл. 5 [формулы (5.20) и (5.21)], если только определить теперь  $[D]$  как

$$[D] = \begin{bmatrix} r K_{rr} & 0 \\ 0 & r K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (10.20)$$

а  $Q$  заменить на произведение  $rQ$ .

Подобие между осесимметрическими и двумерными задачами упрощает решение осесимметрических задач. При использовании одного из способов решения  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  и  $Q$  в двумерной задаче заменяются на  $rK_{rr}$ ,  $rK_{zz}$  и  $rQ$  и далее используется та же самая про-

грамма вычислений. При этом  $\bar{r}$  означает расстояние от оси симметрии до центра элемента, а произведения  $\bar{r}K_{rr}$  и т. д. должны быть вычислены для каждого элемента. Этот приближенный способ дает достаточно точные результаты, если размеры элементов малы. Сочетание большого элемента и большого  $r$  может стать источником ошибки, но вряд ли эта ошибка будет существенна.

Полевая функция  $\phi$  определяется соотношением

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (10.21)$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z),$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j r + c_j z)$$

и

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k r + c_k z).$$

Константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  определены в соотношении (3.10). Объемный интеграл в  $[k^{(e)}]$  дается формулой

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T [D] [B] = & \frac{2\pi \bar{R} K_{rr}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} + \\ & + \frac{2\pi \bar{R} K_{zz}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (10.22) \end{aligned}$$

Здесь через  $\bar{R}$  обозначено произведение матриц:

$$\bar{R} = \frac{1}{12} [R_i \quad R_j \quad R_k] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}, \quad (10.23)$$

ибо объемный интеграл сводится к виду  $\int r dV$  после того, как постоянные члены выносятся за знак интеграла. Действительно, учитывая зависимость  $dV = 2\pi r dA$ , запишем

$$\int r dV = 2\pi \int_A r^2 dA. \quad (10.24)$$

Радиальное расстояние  $r$  может быть выражено в  $L$ -координатах:

$$r = L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k, \quad (10.25)$$

а величина  $r^2$  тогда может быть представлена произведением

$$r^2 = [R_i \quad R_j \quad R_k] \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2 L_2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3 L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}. \quad (10.26)$$

Выполнив интегрирование с помощью интегральных соотношений для  $L$ -координат из гл. 3, получим (10.23).

Если, следуя приближенному способу, заменить  $rK_{rr}$  и  $rK_{zz}$  на константы  $\bar{r}K_{rr}$  и  $\bar{r}K_{zz}$ , то для объемного интеграла в  $[k^{(e)}]$  будем иметь

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{\bar{r}^2 K_{rr}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j b_j & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} + \\ + \frac{\bar{r}^2 K_{zz}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j c_j & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (10.27)$$

В этом случае  $\bar{r} = (R_i + R_j + R_k)/3$ .

Формулы (10.22) и (10.27) совпадают с точностью до замены  $\bar{R}$  на  $\bar{r}$ . Приближенная формула (10.27) будет содержать ошибку, если рассматривается большой элемент и большое число  $\bar{r}$ . Однако, как показывает следующий пример, ошибка эта, вероятно, не существенна.

### Пример

91. Ниже показан треугольный элемент, используемый в некоторой осесимметрической задаче теории поля. Представлены радиальные координаты его узлов. Сравните матрицы теплопроводности элементов, вычисленные по формулам (10.22) и (10.27).

Поскольку соотношения (10.22) и (10.27) совпадают с точностью до замены  $\bar{R}$  на  $\bar{r}$  сравнение указанных матриц можно провести, рассматривая вычисленные значения  $\bar{r}$  и  $\bar{R}$ :

$$\bar{r} = \frac{R_i + R_j + R_k}{3} = \frac{20 + 25 + 23}{3} = 22,67$$

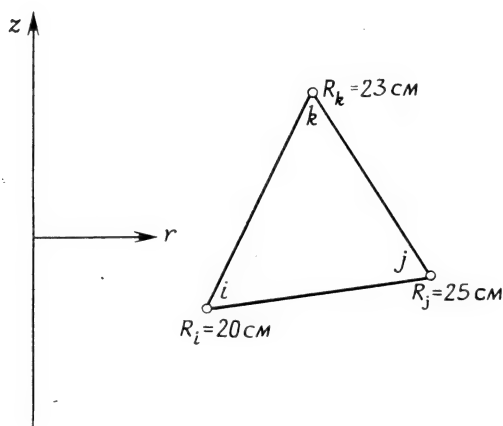
и

$$\bar{r}^2 = 513,78 \text{ см}^2,$$

$$\bar{R} = \frac{1}{12} [R_i \quad R_j \quad R_k] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix},$$

$$\bar{R} = \frac{1}{12} [20 \quad 25 \quad 23] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 20 \\ 25 \\ 23 \end{Bmatrix} = \frac{6178}{12},$$

$$\bar{R} = 514,83 \text{ см}^2.$$



К задаче 91.

Определим относительную величину расхождения в процентах:

$$\frac{\bar{r}^2 - \bar{R}}{\bar{R}} \times 100 = \frac{513,78 - 514,83}{514,83} \times 100 = -0,204\%.$$

Объемный интеграл

$$\int_V rQ [N]^T dV,$$

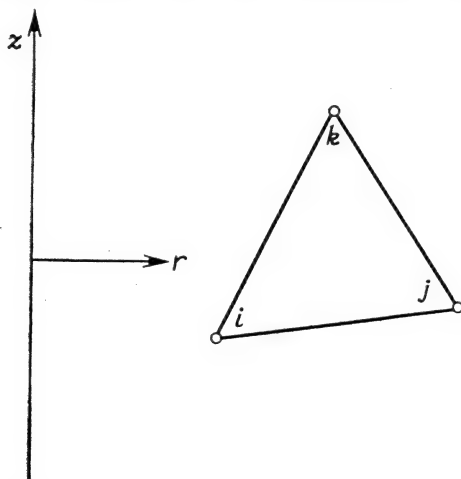
который входит в  $\{f^{(e)}\}$ , может быть аппроксимирован следующей зависимостью:

$$\bar{r}Q \int_V [N]^T dV = \bar{r}Q \int_A 2\pi \left\{ \begin{matrix} rL_1 \\ rL_2 \\ rL_3 \end{matrix} \right\} dA. \quad (10.28)$$

Составляя произведения  $rL_i$  с помощью соотношения (10.25) и интегрируя, получаем

$$\int_V rQ [N]^T dV = \frac{r_{2\pi rQA}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}. \quad (10.29)$$

Точно так же, как при рассмотрении интеграла (10.16), отсюда можно заключить, что тепло от источника внутри элемента распределяется неравномерно по узлам элемента, как это имело место в двумерном случае, представленном формулой (8.47).



Фиг. 10.2. Осесимметричный треугольный элемент.

Поверхностные интегралы в задачах переноса тепла вычисляются относительно просто. Начнем с поверхностного интеграла, который входит в  $[k^{(e)}]$ , и рассмотрим сторону элемента между узлами  $j$  и  $k$  (фиг. 10.2):

$$\begin{aligned} \int_{s_{jk}} h [N]^T [N] dS &= h \int_{\mathcal{L}_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} [0 \quad L_2 \quad L_3] 2\pi r d\mathcal{L} = \\ &= 2\pi h \int_{\mathcal{L}_{jk}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & rL_2L_2 & rL_2L_3 \\ 0 & rL_2L_3 & rL_3L_3 \end{bmatrix} d\mathcal{L}. \quad (10.30) \end{aligned}$$

Используя соотношение (10.25) для  $r$ , составляя соответствующие произведения и интегрируя с учетом формулы (3.43), получаем

$$\int_{s_{jk}} h [N]^T [N] dS = \frac{2\pi h \mathcal{L}_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3R_j + R_k) & (R_j + R_k) \\ 0 & (R_j + R_k) & (R_j + 3R_k) \end{bmatrix}, \quad (10.31)$$

где  $\mathcal{L}_{jk}$  — длина стороны между узлами  $j$  и  $k$ . Существуют еще две формы записи соотношения (10.31), соответствующие двум

другим сторонам элемента. Для сторон между узлами  $i$  и  $j$  и между узлами  $i$  и  $k$  соответственно имеем

$$\int_{S_{ij}} h [N]^T [N] dS = \frac{2\pi h \mathcal{L}_{ij}}{12} \begin{bmatrix} (3R_i + R_j) & (R_i + R_j) & 0 \\ (R_i + R_j) & (R_i + 3R_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

и

$$\int_{S_{ik}} h [N]^T [N] dS = \frac{2\pi h \mathcal{L}_{ik}}{12} \begin{bmatrix} (3R_i + R_k) & 0 & (R_i + R_k) \\ 0 & 0 & 0 \\ (R_i + R_k) & 0 & (R_i + 3R_k) \end{bmatrix}. \quad (10.33)$$

Поверхностный интеграл в  $\{j^{(e)}\}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{S_{ij}} h \varphi_{\infty} [N]^T dS &= 2\pi h \varphi_{\infty} \int_{\mathcal{L}_{ij}} \begin{bmatrix} rL_1 \\ rL_2 \\ 0 \end{bmatrix} d\mathcal{L} = \\ &= \frac{2\pi \mathcal{L}_{ij} h \varphi_{\infty}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Аналогичные формулы для двух других сторон легко получаются изменением положения ненулевых коэффициентов матрицы в формуле (10.34). Двойки при этом всегда остаются на диагонали.

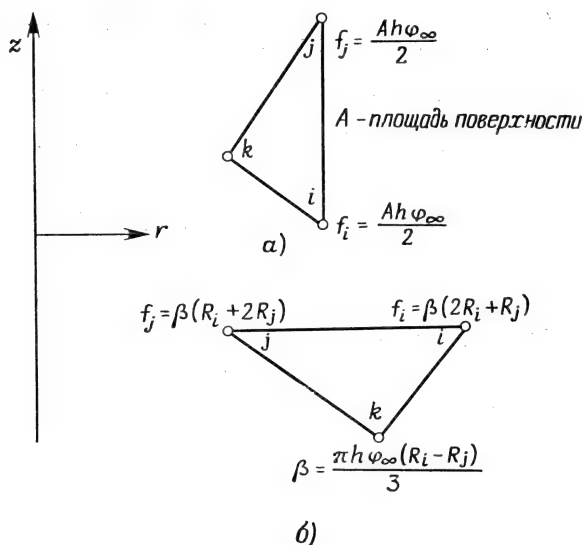
Соотношение (10.34) интересно тем, что оно применимо как для вертикальной, так и для горизонтальной поверхностей соответствующих сторон элемента. Для вертикальной поверхности (фиг. 10.3,а)  $R_i = R_j = R$  и

$$\int_S h \varphi_{\infty} [N]^T dS = \frac{2\pi R \mathcal{L}_{ij} h \varphi_{\infty}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Мы видим, что конвективный приток тепла так же, как и в двумерной задаче, распределяется равномерно по узлам вертикальной поверхности элемента. С другой стороны, если  $R_i$  и  $R_j$  находятся на горизонтальной поверхности (фиг. 10.3,б), то  $\mathcal{L}_{ij} = R_i - R_j$  и

$$\int_{S_{ij}} h \varphi_{\infty} [N]^T dS = \frac{2\pi h \varphi_{\infty}}{6} (R_i - R_j) \begin{Bmatrix} (2R_i + R_j) \\ (R_i + 2R_j) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

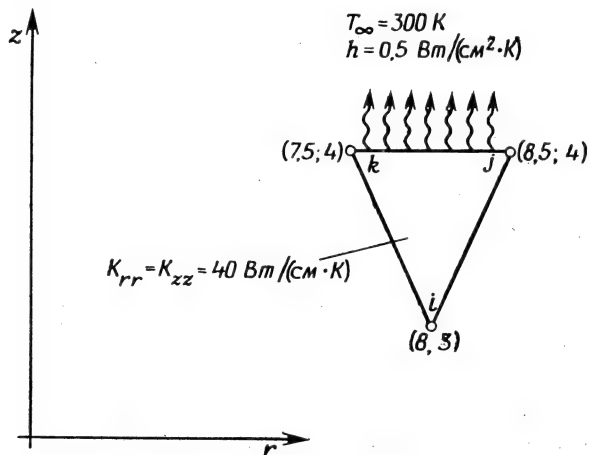
Теперь конвективное тепло, характеризуемое произведением  $2\pi h \varphi_{\infty} \mathcal{L}_{ij}/6$ , распределяется неравномерно по узлам. Большая часть этой величины приходится на узел, наиболее удаленный от оси симметрии.



Фиг. 10.3. Узловые компоненты  $\{f^{(e)}\}$  для горизонтальных и вертикальных поверхностей сторон элементов.

## Пример

92. Составьте уравнения, определяющие элемент, для осесимметричного треугольника, показанного ниже.



К задаче 92.

Матрица теплопроводности  $[k^{(e)}]$  выражается в виде суммы двух интегралов: объемного интеграла, представленного формулой (10.22), и поверхностного интеграла из (10.31). Запишем числовые значения констант, входящих в эти формулы:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 1 & 8,5 & 4 \\ 1 & 7,5 & 4 \end{vmatrix} = 1,0,$$

$$\begin{aligned} b_i &= Z_j - Z_k = 0, & c_i &= R_k - R_j = -1, \\ b_j &= Z_k - Z_i = 1, & c_j &= R_i - R_k = 0,5, \\ b_k &= Z_i - Z_j = -1, & c_k &= R_j - R_i = 0,5, \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{12} [8 \quad 8,5 \quad 7,5] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 8,5 \\ 7,5 \end{Bmatrix} = 64,04,$$

$$\frac{2\pi RK_{rr}}{4A} = \frac{2\pi 64,04 \cdot 40}{4 (1/2)} = 8047,5 = \frac{2\pi RK_{zz}}{4A}.$$

Подставив результат вычисления в формулу (10.22), получим

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T [D] [B] dV &= 8047,5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ 8047,5 \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[k_c^{(e)}] = \begin{bmatrix} 8047,5 & -4023,75 & -4023,75 \\ -4023,75 & 10059,38 & -6035,63 \\ -4023,75 & -6035,63 & 10059,38 \end{bmatrix}.$$

Поверхностному интегралу в  $[k^{(e)}]$ , вычисленному по поверхности стороны  $jk$ , соответствует выражение

$$\frac{2\pi h \mathcal{L}_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3R_j + R_k) & (R_j + R_k) \\ 0 & (R_j + R_k) & (R_j + 3R_k) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jk} &= 8,5 - 7,5 = 1 \text{ см}, \\ R_j &= 8,5 \text{ и } R_k = 7,5. \end{aligned}$$

Подстановка этих величин дает

$$[k_h^{(e)}] = 0,262 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 16 \\ 0 & 16 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,65 & 4,19 \\ 0 & 4,19 & 8,12 \end{bmatrix}.$$

Матрица теплопроводности получается сложением двух вычисленных матриц:

$$[k^{(e)}] = [k_c^{(e)}] + [k_h^{(e)}] = \begin{bmatrix} 8047,5 & -4023,75 & -4023,75 \\ -4023,75 & 10068,03 & -6031,44 \\ -4023,75 & -6031,44 & 10067,5 \end{bmatrix}.$$

Поверхностный интеграл, входящий в  $\{f^{(e)}\}$ , записывается следующим образом:

$$\{f^{(e)}\} = \frac{2\pi \mathcal{L}_{jk} h \varphi_{\infty}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix},$$

или

$$\{f^{(e)}\} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1/2 \cdot 300}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 8,5 \\ 7,5 \end{Bmatrix}$$

и

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3848,4 \\ 3691,4 \end{Bmatrix}.$$

Окончательные уравнения, определяющие элемент, имеют вид

$$\begin{bmatrix} 8047,5 & -4023,75 & -4023,75 \\ -4023,75 & 10068,03 & -6031,44 \\ -4023,75 & -6031,44 & 10067,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3848,4 \\ 3691,4 \end{Bmatrix}.$$

### 10.3. Машинная реализация

Решение радиальных и осесимметрических задач теории поля на ЭВМ мало отличается от машинной реализации одномерных и двумерных задач теории поля, рассмотренной в гл. 8 и 9. Про-

грамма для осесимметрического случая проще соответствующей двумерной программы, потому что в первом случае отпадает необходимость в координатных преобразованиях. Главные оси инерции должны быть параллельны координатным осям  $r, z$ , ибо в противном случае задача перестанет быть осесимметрической. В теле, составленном из нескольких материалов, оси инерции для всех материалов также должны быть ориентированы по оси симметрии.

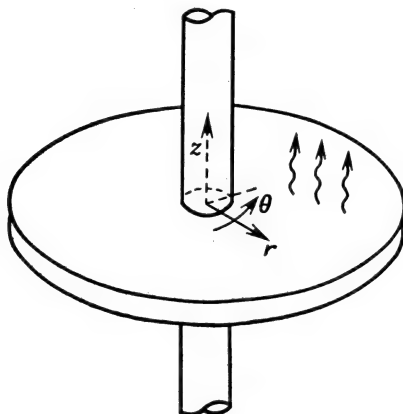
Программы для ЭВМ составляются так, чтобы их можно было использовать для двумерных или осесимметрических задач теории поля. Переход от одного типа задач к другому в таких программах обычно осуществляется с помощью приближенного метода, рассмотренного в предыдущем разделе. Величины  $K_{xx}$  и  $K_{yy}$  заменяются на  $\bar{r}K_{rr}$  и  $\bar{r}K_{zz}$ . Любая программа такого типа должна содержать операторы, которые позволяют выбирать соответствующие формулы для поверхностных интегралов. При решении осесимметрических задач указанные интегралы содержат радиальное расстояние, и формулы, определяющие эти интегралы, не так просто приспособить для двумерного случая. Так, соотношение (10.34) в случае двумерной задачи будет давать правильные результаты, если оно используется для вертикальной поверхности, но будет давать ошибочные значения при рассмотрении горизонтальной поверхности.

## Задачи

93. Убедитесь в эквивалентности функционала (10.7) дифференциальному уравнению (10.4) с граничными условиями (10.6) (см. приложение А).

94. Металлическая труба, для которой  $K_{rr}=70$  Вт/(см·К), окружена изоляционным материалом с  $K_{rr}=5$  Вт/(см·К). Жидкость, движущаяся в трубе, имеет температуру 573 К. Температура снаружи изолятора равна 320 К. Размеры трубы: внутренний диаметр 2 см, внешний диаметр 4 см. Внешний диаметр изолятора 8 см. Используя четырехэлементную модель, вычислите температуру срединной поверхности трубы, внутренней поверхности трубы-изолятора и срединной поверхности изолятора. Определите тепловой поток для каждого элемента и выясните, почему он не постоянен по элементам.

95. В качестве теплообменника используется ряд тонких круглых пластин, насаженных на круглую трубу, по которой течет жидкость. Пластины считаются тонкими, так что изменением температуры по их толщине можно пренебречь. Предполагая температурное поле радиальным, вычислите поверхностные интегралы, связанные с передачей тепла от пластины в окружающую среду. Теплообменом по торцевым частям пластины пренебречь.



К задаче 95.

96. Выведите определяющие элементы уравнения, необходимые для расчета средней массовой температуры тела. Средняя массовая температура определяется формулой  $\bar{R} = \frac{\int_V T(x, y) dM}{\int_V dM}$ , где  $dM$  — элементарная масса. Выполните расчеты для следующих случаев:

- а) радиального переноса тепла;
- б) осесимметричного переноса тепла.

97. Вычислите объемный интеграл  $\int_V rQ[N]^T dV$  без применения какой-либо аппроксимации. Используя элемент из задачи 91, сравните вычисленное значение с результатом, полученным по формуле (10.28).

98. Вычислите поверхностный интеграл  $\int_S hT_\infty[N]^T dS$  вдоль стороны между узлами  $k$  и  $i$  треугольного элемента.

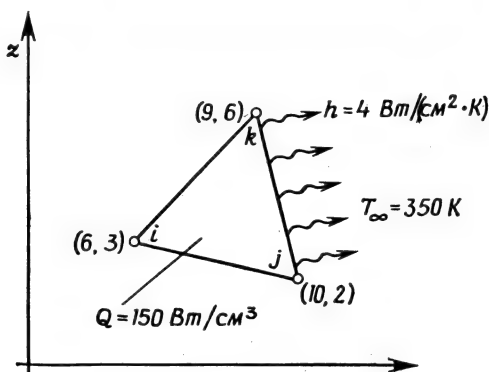
99. Составьте вектор-столбец  $\{f\}$  для изображенного ниже элемента.

100. Составьте матрицу теплопроводности  $[k^{(e)}]$  для элемента, используемого в задаче 99, если

$$K_{rr} = 2K_{zz} = 80 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}.$$

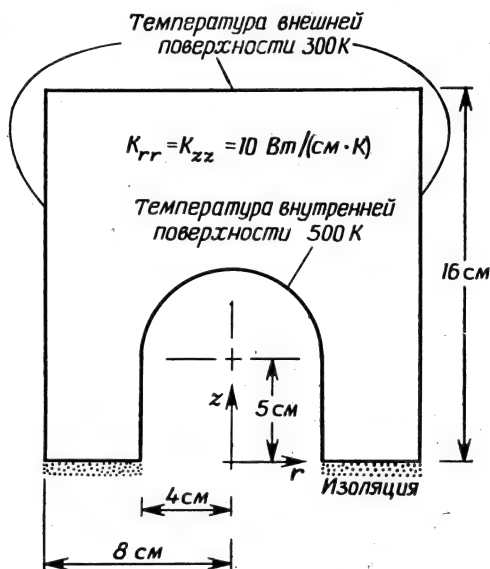
101. Обсудите способ расчета теплообменника в виде ряда тонких круговых пластин, насаженных на сплошной круговой цилиндр. Используйте элементы обоих типов, рассмотренные в этой главе.

102. Измените программу FLDMCH так, чтобы ее можно было использовать для решения задач, включающих радиальный поток воды к скважине. Проверьте программу, решив задачу 90 из этой главы.



К задаче 99.

103. Модифицируйте программу TDHEAT так, чтобы ее можно было использовать для решения осесимметрической задачи переноса тепла. Используйте эту программу для определения распределения температуры в теле, показанном ниже.



К задаче 103.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed., Intex Educational Publishers, N. Y., 1973.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971, Ch. 15; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 11

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В задачах теории поля, которые рассматривались в двух предыдущих главах, предполагалось, что к моменту, когда предпринимается анализ, в теле уже достигнуто установившееся состояние. Другой важный класс физических задач представляют задачи, учитывающие изменение искомых величин во времени. В некоторых из них имеет место так называемый переходный период между началом физического процесса и достижением установившегося состояния. Встречаются задачи, в которых установившееся состояние вообще не достигается и переходный период составляет весь физический процесс.

С нестационарными задачами очень часто сталкиваются при исследовании явления переноса тепла и течения грунтовых вод. Динамическое поведение различных конструкций также представляет пример переходной задачи, но оно не будет рассматриваться в этой книге. Наше обсуждение ограничивается переходными задачами теории поля в тех областях, которые были рассмотрены в предыдущих главах.

#### 11.1. Соотношения, определяющие элементы

Многие физические задачи описываются рассмотренным в пятой главе квазигармоническим дифференциальным уравнением, включающим член, который содержит частную производную по времени. При этом получается нестационарное уравнение

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + Q = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (11.1)$$

с граничными условиями, выраженными формулами (5.26) и (5.27). Величина  $\lambda$  в уравнении (11.1) представляет собой некоторый параметр материала или комбинацию таких параметров. Все коэффициенты уравнения  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  и  $\lambda$ , также как и  $Q$ , могут изменяться со временем.

При использовании метода конечных элементов для решения уравнения (11.1) член с частной производной по времени рассматривается как функция пространственных координат в каждый фик-

сированный момент времени. Тогда уравнение (11.1) можно рассматривать как уравнение, идентичное (5.25), с учетом того, что величина  $Q$  в формуле (5.25) теперь заменяется на разность

$$Q - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (11.2)$$

После этой замены решение физической задачи получается минимизацией связанного с уравнением (11.1) функционала для каждой точки временного интервала. Перед каждой такой минимизацией коэффициенты теплопроводности и другие величины, зависящие от времени, должны быть пересчитаны заново.

Функционал, связанный с уравнением (11.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2 \left( Q - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Phi \right] dV + \int_{S_1} q \Phi dS + \\ + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\Phi^2 - 2\Phi\Phi_\infty + \Phi_\infty^2] dS. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Выражение (11.3) отличается от (5.32) только величиной  $Q$  в объемном интеграле. В результате минимизации получаются соотношения, идентичные (5.45) и (5.46). Эти соотношения будут приведены ниже.

Вклад модифицированной величины  $Q$  в функционал (11.3) составляет

$$\chi_Q = - \int_V \Phi \left( Q - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dV. \quad (11.4)$$

Последнее соотношение должно быть переписано как

$$\chi_Q = \sum_{e=1}^E \int_V \Phi^{(e)} \left[ \lambda^{(e)} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial t} - Q^{(e)} \right] dV, \quad (11.5)$$

поскольку  $\Phi$  определяется поэлементно. Полевая функция  $\Phi^{(e)}$  определяется формулой

$$\Phi^{(e)} = [N^{(e)}] \{\Phi\}, \quad (11.6)$$

где  $[N^{(e)}]$  — расширенная форма матрицы функций формы (4.8). Дифференцируя выражение (11.6) по времени, получаем

$$\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial t} = [N^{(e)}] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial t}, \quad (11.7)$$

так как  $[N^{(e)}]$  является только функцией координат и не зависит от времени. Подстановка выражений (11.6) и (11.7) в (11.5) дает

$$\chi_Q = \sum_{e=1}^E \int_V \left( \lambda [N^{(e)}] \{ \Phi \} [N^{(e)}] \frac{\partial \{ \Phi \}}{\partial t} - [N^{(e)}] \{ \Phi \} Q \right) dV. \quad (11.8)$$

Эта сумма интегралов должна быть минимизирована по  $\{ \Phi \}$ . Дифференцируя по  $\{ \Phi \}$ , получаем

$$\frac{\partial \chi_Q}{\partial \{ \Phi \}} = \sum_{e=1}^E - \int_V [N^{(e)}]^T Q dV + \sum_{e=1}^E \left( \int_V \lambda [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV \right) \frac{\partial \{ \Phi \}}{\partial t}. \quad (11.9)$$

Второе соотношение в (5.42) должно быть заменено соотношением (11.9). После объединения (11.9) с результатами дифференцирования остальных интегралов из (11.3) процесс минимизации приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$[C] \frac{\partial \{ \Phi \}}{\partial t} + [K] \{ \Phi \} + \{ F \} = 0. \quad (11.10)$$

Вклад каждого элемента в матрицы  $[K]$ ,  $[C]$  и  $\{ F \}$  выражается формулами

$$[c^{(e)}] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV, \quad (11.11a)$$

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_2} h [N]^T [N] dS, \quad (11.11b)$$

$$\{ f^{(e)} \} = - \int_V Q [N]^T dV + \int_{S_1} q [N]^T dS - \int_{S_2} h \Phi_\infty [N]^T dS. \quad (11.11в)$$

Все интегралы в формулах (11.11a)—(11.11в) берутся по отдельному элементу. Суммирование вкладов отдельных элементов проводится обычным образом. Соотношение (11.10) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Матрицу  $[C]$  в (11.10) иногда называют матрицей демпфирования. Это единственная новая матрица. Интегралы, определяющие  $[k^{(e)}]$  и  $\{ f^{(e)} \}$  в формулах (11.11б), (11.11в), уже рассматривались в предыдущих главах.

В случае решения задач переноса тепла величина  $\lambda$  в формуле (11.1) равна произведению  $\rho c$ , где  $\rho$  — плотность,  $\text{кг/м}^3$ , а  $c$  — удельная теплоемкость,  $\text{Дж/м}^3 \cdot ^\circ\text{C}$ . Величинам  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  и  $K_{zz}$  соответствуют коэффициенты теплопроводности, введенные в гл. 8.

Уравнение, описывающее нестационарное фильтрационное течение, имеет вид

$$T_{xx} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + T_{yy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + T_{zz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + Q = S \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (11.12)$$

где  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$  и  $T_{zz}$  — коэффициенты проницаемости. В ограниченном водоносном слое  $T_{xx} = bK_{xx}$  и т. д., где  $b$  — глубина водоносного слоя. Если водоносный слой неограничен,  $T_{xx} = \Phi K_{xx}$  и т. д., где  $\Phi$  — пьезометрический напор, измеряемый от дна водоносного слоя,  $S$  — коэффициент упругоемкости.

## 11.2. Матрица демпфирования элемента

Рассмотрение переходных задач теории поля приводит к новой матрице  $[C]$ , называемой матрицей демпфирования. Вклад отдельного элемента в эту матрицу определяется объемным интегралом (11.11а), который должен быть вычислен для каждого элемента.

### 11.2.1. Одномерный симплекс-элемент

Матрица функций формы для одномерного элемента записывается в локальной системе координат следующим образом:

$$[N] = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad \frac{x}{L} \right].$$

Подставляя это выражение в формулу (11.11а) и учитывая зависимость  $dV = A dx$ , где  $A$  — площадь поперечного сечения элемента, получаем

$$[c^{(e)}] = \lambda A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx,$$

или

$$[c^{(e)}] = \frac{\lambda AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11.13)$$

### 11.2.2. Двумерный симплекс-элемент

Матрица функций формы для двумерного элемента, выраженная через плоские  $L$ -координаты, имеет вид

$$[N] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3].$$

Считая толщину элемента единичной, вычислим объемный интеграл (11.11а):

$$[c^{(e)}] = \lambda \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} [L_1 \quad L_2 \quad L_3] dA = \frac{\lambda A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11.14)$$

Соотношение (11.14) идентично интегралу, который встречается в теории согласованных напряжений, если  $\lambda$  полагается равной единице. Матрица, которая встречается в теории согласованных напряжений, является матрицей демпфирования, поэтому каждое из приводимых в этом разделе соотношений, определяющих элементы, может быть использовано для построения приближенной матрицы в соответствии с теорией согласованных результатов элементов. Например, в (11.14) представлена согласованная матрица элемента для двумерного симплекс-элемента.

### 11.2.3. Трехмерный симплекс-элемент

Функции формы для трехмерного симплекс-элемента, выраженные через объемные  $L$ -координаты, имеют вид

$$[N] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4].$$

Подставляя их в формулу (11.11а) и используя объемный интеграл (3.46), получаем

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda V}{20} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11.15)$$

### 11.2.4. Радиальные и осесимметричные элементы

Матрица демпфирования для радиальной и осесимметрической задач определяется соотношением

$$[c^{(e)}] = \int_V r [N]^T [N] dV.$$

Для радиального элемента  $dV = 2\pi r dr$  и  $N = 1/L[(r - R_j)(R_i - r)]$ . В результате вычисления интеграла имеем

$$[c^{(e)}] = \frac{2\pi\lambda}{60L^3} \times \begin{bmatrix} (2R_j^5 - 20R_j^2R_i^3 + 30R_jR_i^4 - 12R_i^5) & (3R_j^5 - 5R_j^4R_i + 5R_jR_i^4 - 3R_i^5) \\ \text{Симметрично} & (12R_j^5 - 30R_j^4R_i + 20R_j^3R_i^2 - 2R_i^5) \end{bmatrix}. \quad (11.16)$$

Матрицу демпфирования для осесимметричного элемента наиболее просто вычислить, если использовать плоские  $L$ -координаты и соотношение (10.25). Ниже приведены окончательные выражения для коэффициентов симметричной матрицы:

$$\begin{aligned} c_{11} &= D [12R_i^2 + 2R_j^2 + 2R_k^2 + 6R_iR_j + 6R_iR_k + 2R_jR_k], \\ c_{12} &= D [3R_i^2 + 3R_j^2 + R_k^2 + 4R_iR_j + 2R_iR_k + 2R_jR_k], \\ c_{13} &= D [3R_i^2 + R_j^2 + 3R_k^2 + 2R_iR_j + 4R_iR_k + 2R_jR_k], \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} c_{22} &= D [2R_i^2 + 12R_j^2 + 2R_k^2 + 6R_iR_j + 2R_iR_k + 6R_jR_k], \\ c_{23} &= D [R_i^2 + 3R_j^2 + 3R_k^2 + 2R_iR_j + 2R_iR_k + 4R_jR_k], \\ c_{33} &= D [2R_i^2 + 2R_j^2 + 12R_k^2 + 2R_iR_j + 6R_iR_k + 6R_jR_k], \end{aligned}$$

где  $D = 2\pi A\lambda / 180$ .

### 11.3. Конечно-разностное решение дифференциальных уравнений

Чтобы получить значения  $\{\Phi\}$  в каждой точке временного интервала, необходимо решить линейное дифференциальное уравнение (11.10). Существуют два распространенных метода решения уравнений такого типа. Один из них заключается в приближенной замене частной производной по времени ее конечно-разностным аналогом с применением центральной разностной схемы. Другой метод состоит в использовании конечных элементов, определенных теперь уже не в пространственной, а во временной области. Этот метод обсуждается в гл. 17 в связи с методом Галёркина. Здесь мы рассмотрим конечно-разностное решение.

На кривой  $\Phi(t)$  (фиг. 11.1) даны две точки с абсциссами  $t_0$  и  $t_1$  на расстоянии  $\Delta t = t_1 - t_0$  друг от друга. Для первой производной в средней точке интервала  $t_1 - t_0$  имеем приближенное соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta t}. \quad (11.18)$$

Если рассматривать узловые значения как функции времени, то можно записать

$$\frac{d\{\Phi\}}{dt} = \{\dot{\Phi}\} = \frac{1}{\Delta t} (\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_0). \quad (11.19)$$

Так как  $\{\dot{\Phi}\}$  вычисляется в средней точке временного интервала, в этой точке также должны быть вычислены  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$ . Эти величины определяются по приближенным формулам

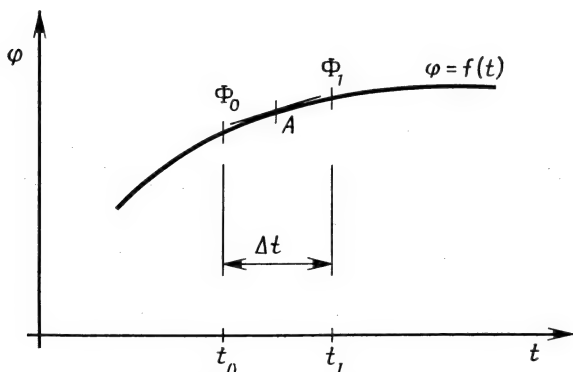
$$\{\Phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\Phi\}_1 + \{\Phi\}_0) \quad (11.20)$$

и

$$\{F\}^* = -\frac{1}{2} (\{F\}_1 + \{F\}_0). \quad (11.21)$$

Подставляя выражения (11.19)–(11.21) в дифференциальное уравнение (11.10), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [C] \{\Phi\}_1 - \frac{1}{\Delta t} [C] \{\Phi\}_0 + \frac{1}{2} [K] \{\Phi\}_1 + \\ + \frac{1}{2} [K] \{\Phi\}_0 + \{F\}^* = 0, \end{aligned} \quad (11.22)$$



Фиг. 11.1. Численное определение первой производной. Первая производная  $\varphi$  в точке  $A$  равна  $(\Phi_1 - \Phi_0)/\Delta t$ .

которое может быть преобразовано к виду

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\Phi\}_1 = \left( \frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \{\Phi\}_0 - 2 \{F\}^*. \quad (11.23)$$

Считая исходные узловые значения в момент времени  $t$  известными, узловые значения в момент времени  $t + \Delta t$  можно получить, решая уравнение (11.23). Вектор-столбец  $\{F\}^*$  содержит известные параметры; следовательно, его можно вычислить до решения уравнения (11.23).

Так как соотношения (11.18)–(11.20) записаны в средней точке временного интервала, то многие предпочитают вычислять  $\{\Phi\}$  именно в этой точке. Эти узловые значения могут быть определены путем подстановки результатов, полученных из решения уравнения (11.23), в (11.20) вместе с  $\{\Phi\}_0$ . Это можно также сделать, исключая из уравнения (11.22) с помощью формулы (11.20) члены, содержащие  $\{\Phi\}_1$ . Такой способ приводит к уравнению

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\Phi\}^* = \frac{2}{\Delta t} [C] \{\Phi\}_0 - \{F\}^*. \quad (11.24)$$

Независимо от того, используется формула (11.23) или (11.24), окончательная система уравнений имеет вид

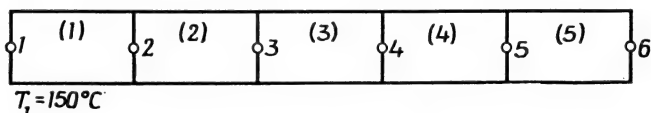
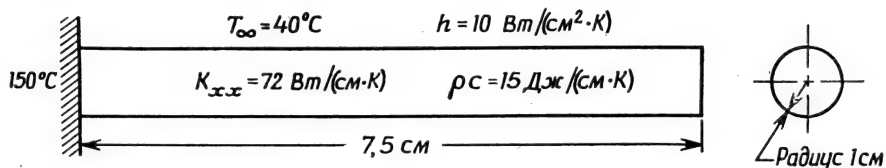
$$[A] \{\Phi\}_{\text{нов}} = [P] \{\Phi\}_{\text{стар}} - \{F\}. \quad (11.25)$$

Матрица  $[A]$  является комбинацией матриц  $[C]$  и  $[K]$  и зависит от шага по времени  $\Delta t$ . Если  $\Delta t$  и параметры материала не зависят от времени или от  $\{\Phi\}$ , то матрица  $[A]$  во все моменты времени одинакова. Если  $\Delta t$  или параметры материала изменяются в процессе решения, то матрицу  $[A]$  следует вычислять каждый раз заново, проводя суммирование по всем элементам и затем триангуляризацию. Эта процедура значительно увеличивает объем вычислений, но она неизбежна при переменном  $\Delta t$  или в случае, когда  $K_{xx}$  и т. д. являются функциями температуры.

Объем численных расчетов даже для несложной задачи слишком велик, чтобы можно было здесь привести полностью какой-то числовой пример. Однако в следующем примере приведено вычисление матрицы  $[A]$ .

### Пример

104. Требуется составить матрицу  $[A]$  из формулы (11.25) для стержня (задача 59), предполагая, что  $c\rho = 15$  Дж/(см·К). Шаг по времени считать равным 1 мин. Стержень и расположение узловых точек показаны ниже.



К задаче 104.

Матрица  $[K]$  была рассчитана в задаче 59; она имеет вид

$$[K] = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 116 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 116 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 116 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 116 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{bmatrix}.$$

Матрица демпфирования элемента определяется формулой (11.13):

$$[c^{(e)}] = \frac{\rho c A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Подстановка числовых значений  $A$  и  $L$  дает

$$[c^{(e)}] = \frac{15\pi \cdot 1^2 \cdot 1,5}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 7,5 & 3,75 \\ 3,75 & 7,5 \end{bmatrix}.$$

Объединяя матрицы элементов в соответствии с методом прямой жесткости, получаем

$$[C] = \pi \begin{bmatrix} 7,5 & 3,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,75 & 15,0 & 3,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,75 & 15 & 3,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,75 & 15 & 3,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,75 & 15 & 3,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,75 & 15 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[A]$  получается сложением матриц  $[C]$  и  $[K]$ :

$$[A] = [K] + \frac{2}{\Delta t} [C].$$

В размерности коэффициента теплопроводности время выражается в часах, поэтому  $\Delta t$  должно быть выражено в часах, т. е.  $\Delta t = 1/60$ , и  $[A]$  равно  $[K] + 120[C]$ , или

$$A = \pi \begin{bmatrix} 958 & 407 & & & & \\ 407 & 1916 & 407 & & & \\ & 407 & 1916 & 407 & & \\ & & 407 & 1916 & 407 & \\ & & & 407 & 1916 & 407 \\ & & & & 407 & 968 \end{bmatrix}.$$

#### 11.4. Численная устойчивость и колебания

Конечно-разностная схема, используемая для временной области, построена на основе центрально-разностной схемы Кранка—Никольсона, которая является безусловно устойчивой [1]. Безусловная устойчивость означает, что если распределение температуры во времени преобразовать по Фурье в частотную область, то коэффициент усиления для каждой частотной компоненты будет затухать во времени. При этом могут возникать и обычно возникают колебания числовых значений искомых величин даже тогда, когда ме-

тод счета сам по себе устойчив. Размах колебаний зависит от свойств материала, размеров элемента, величины временного шага и от значений фурье-компонент температурного распределения, соответствующих началу временного шага. Поскольку свойства материала обычно известны, переменными, которые можно варьировать, являются только размеры элемента и шаг по времени. Фурье-компоненты начального распределения температуры могут быть изменены путем изменения размеров элемента. Одновременное уменьшение размеров элемента и временного шага будет существенно снижать размах колебаний. Но изменение только одной из этих переменных, когда другая остается фиксированной, не всегда улучшает ситуацию. Типичной ошибкой является сочетание грубого сеточного разбиения области на элементы и малого шага по времени. Такая комбинация иногда приводит к результатам, которые противоречат физическому смыслу задачи. Грубое разбиение области обычно является результатом утомительной работы по подготовке исходных данных элемента там, где программа, генерирующая сеточное разбиение, неприменима.

Большие трудности возникают при таком виде температурного распределения, когда значения температуры в граничных узлах значительно выше (или ниже), чем внутри тела. При такой ситуации граничные элементы испытывают большие температурные градиенты. Общее правило состоит в том, чтобы использовать малые элементы при наличии значительных градиентов температуры. Использование малых элементов будет уменьшать размах колебаний числовых значений, которые могут возникнуть в связи с резким изменением температуры.

## 11.5. Решение задач на ЭВМ

Составление и решение уравнения (11.24) во многом аналогичны процедурам, которые обсуждались в предыдущих главах, но все же отличаются от них. Построение матрицы  $[A]$  осуществляется по общей уже рассмотренной методике. Должны быть составлены две матрицы элементов, на основе которых строятся матрицы  $[A]$  и  $[P]$ , соответствующие по форме либо (11.23), либо (11.24). Далее осуществляется триангуляризация  $[A]$ , а затем используется подпрограмма, которая вычисляет искомые узловые значения  $\{\Phi\}$  в нужные моменты времени.

Методика решения уравнения (11.24) зависит от того, имеются ли по условиям задачи какие-либо заданные узловые значения. Если ни одно из значений  $\{\Phi\}$  не задано заранее, то уравнение (11.24) решается так же, как любая другая система уравнений. Произведение  $[P]\{\Phi\}_0$  вместе с  $\{F\}$  образует вектор-столбец, который разлагается параллельно с триангуляризацией  $[A]$ , после чего решение получается обратной прогонкой.

Если некоторые компоненты  $\{\Phi\}_0$  заданы, они должны оставаться неизменными во времени. Это означает, что заданные значения  $\{\Phi\}_0$  следует восстанавливать после каждой итерации. Необходимость восстановления заданных значений требует запоминания этих значений вместе с соответствующими им номерами узлов.

В программе должна содержаться информация о числе итераций и шаге по времени  $\Delta t$ . В некоторых программах предусматривается выборочная печать результатов только для определенных итераций вместо того, чтобы делать это после каждой итерации. Программа с такой выборочной печатью должна содержать дополнительную информацию, связанную с указанием момента печатания результатов счета.

## Задачи

105. Проверьте матрицу демпфирования элемента, представленную следующими соотношениями: а) (11.13), б) (11.14), в) (11.15), г) (11.16), д) (11.17).

106. Выведите уравнение (11.24), которое определяет  $\{\Phi\}$  в средней точке временного шага.

107. Используя уравнение (11.24), рассчитайте  $\{\Phi\}$  для задачи о бруске (задача 104). Вектор-столбец  $\{F\}$  приведен в задаче 59, а приведенная к треугольному виду матрица  $[K] + 2/\Delta t [C]$  дана ниже. Рассмотрение во времени ограничить тремя минутами.

$$\begin{bmatrix} -958 & 407 & & & & \\ & 1743,09 & 407 & & & \\ & & 1820,97 & 407 & & \\ & & & 1825,03 & 407 & \\ & & & & 1825,23 & 407 \\ & & & & & 877,24 \end{bmatrix}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Donea J., On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 103—110 (1974).

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Bruch J. C., Jr., Zyvaloski G., Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 481—494 (1974).  
 Köhler W., Pitt J., Calculation of Transient Temperature Fields with Finite Elements in Space and Time Dimensions, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 625—631 (1974).  
 Zienkiewicz O. C., Parekh C. J., Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 2, 61—71 (1970).

## Глава 12

### МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Применения метода конечных элементов к задачам механики деформируемого твердого тела очень обширны. Сюда относятся задачи теории упругости, задачи теории пластин и оболочек, задачи расчета конструкций, составленных из пластин и оболочек, анализ упругопластического и вязкоупругого поведения материала, динамические задачи, расчет составных конструкций. Данная глава посвящена задачам теории упругости. Другие области механики деформируемого тела рассматриваться не будут. Мы обсудим здесь общие случаи одномерных, двумерных и трехмерных задач теории упругости, а также специальный случай задач с осевой симметрией. Кроме того, будет рассмотрена машинная реализация задачи о плоском напряженном состоянии.

Теоретическим введением к этой главе служит материал, представленный в гл. 5, где рассмотрена минимизация потенциальной энергии упругого тела. В процессе минимизации получаются интегралы, которые входят в уравнения для элементов. Эти интегралы имеют вид

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV, \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} = & - \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \mathfrak{X}^{(e)} \\ \mathcal{Y}^{(e)} \\ \mathfrak{Z}^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV - \\ & - \int_S [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS - \{P\}, \quad (12.2) \end{aligned}$$

где  $[B^{(e)}]$  — матрица градиентов, связывающая деформации и перемещения;  $[D^{(e)}]$  — матрица, описывающая механические свойства;  $\{\varepsilon_0^{(e)}\}$  — начальная деформация элемента;  $[N^{(e)}]$  — матрица функций формы;  $\mathfrak{X}^{(e)}$ ,  $\mathcal{Y}^{(e)}$ ,  $\mathfrak{Z}^{(e)}$  — объемные силы,  $p_x^{(e)}$ ,  $p_y^{(e)}$ ,  $p_z^{(e)}$  — поверхностные нагрузки и  $\{P\}$  — вектор-столбец узловых сил.

Определение этих матриц и вычисление приведенных выше интегралов — главная цель этой главы.

## 12.1. Теория упругости. Одномерный случай

Простейшая одномерная задача является удобной отправной точкой для дальнейшего изложения, поскольку только она позволяет проиллюстрировать все выкладки для конкретного числового примера. В двумерном и тем более в трехмерном случае объем вычислений слишком велик для этого. Так как обсуждение, проводимое ниже, относится к отдельному элементу, верхний индекс в обозначениях всех величин, за исключением  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$ , будет опускаться.

Предполагая, что одномерное упругое тело ориентировано вдоль оси  $x$ , будем иметь только одну компоненту тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  и соответствующую компоненту тензора деформаций  $\epsilon_{xx}$ . Запишем закон Гука

$$\sigma_{xx} = E(\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}). \quad (12.3)$$

Формула (12.3) в матричном виде записывается как  $\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\})$ , поэтому  $[D] = E$ , где  $E$  — модуль упругости. Начальную деформацию обычно связывают с тепловым расширением  $\alpha \Delta T$ , где  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения, а  $\Delta T$  — отклонение температуры от некоторого равновесного значения.

Для одномерного элемента функция перемещения имеет вид

$$u = N_i U_i + N_j U_j = [N] \{U\}, \quad (12.4)$$

где  $U_i$  и  $U_j$  — перемещения узлов  $i$  и  $j$  в направлении оси  $x$ . Деформация  $\epsilon_{xx}$  связана с перемещением формулой

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \left[ \frac{dN_i}{dx} \quad \frac{dN_j}{dx} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (12.5)$$

Производные от функций формы вычисляются легко, так как

$$N_i = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{и} \quad N_j = \frac{x}{L}.$$

Дифференцирование дает

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \{U\} = [B] \{U\}. \quad (12.6)$$

Матрица градиентов  $[B]$  теперь определена, так что можно приступить к составлению матрицы жесткости. Подставляя  $[B]$  и  $[D]$  в формулу (12.1) и предполагая площадь поперечного сечения постоянной, получаем

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{AE}{L^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] \int_0^L dx, \quad (12.7)$$

или

$$[k^{(e)}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.8)$$

Соотношение (12.8) идентично по форме матрице элемента, полученной в одномерном случае переноса тепла.

Интегралы, определяющие вектор нагрузки, вычисляются также просто. Интеграл, связанный с тепловым расширением, записывается как

$$-\int_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV = -\frac{\alpha EA (\Delta T)}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_0^L dx = -\alpha EA (\Delta T) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (12.9)$$

Интеграл от объемных сил имеет вид

$$-\int_V [N]^T \{x\} dV = -xA \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx = -\frac{xAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (12.10)$$

Из поверхностных нагрузок в одномерном случае остается только  $p_x$ , и она должна быть сосредоточена в одной из узловых точек. Предполагая, что  $p_x$  приложена в  $i$ -м узле, вычислим поверхностный интеграл

$$-\int_S [N]^T \{p_x\} dS = -p_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \int_S dS = -p_x A_i \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12.11)$$

где нижний индекс  $i$  обозначает номер узла. Матрица функций формы сводится к  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , потому что нагрузка сосредоточена в узле. Если она приложена в  $j$ -м узле, поверхностный интеграл записывается как

$$-\int_S p_x [N]^T dS = -p_x A_j \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (12.12)$$

Полная система уравнений, определяющих элемент, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} &= \alpha AE (\Delta T) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \\ &+ A_i p_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + A_j p_x \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{xAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

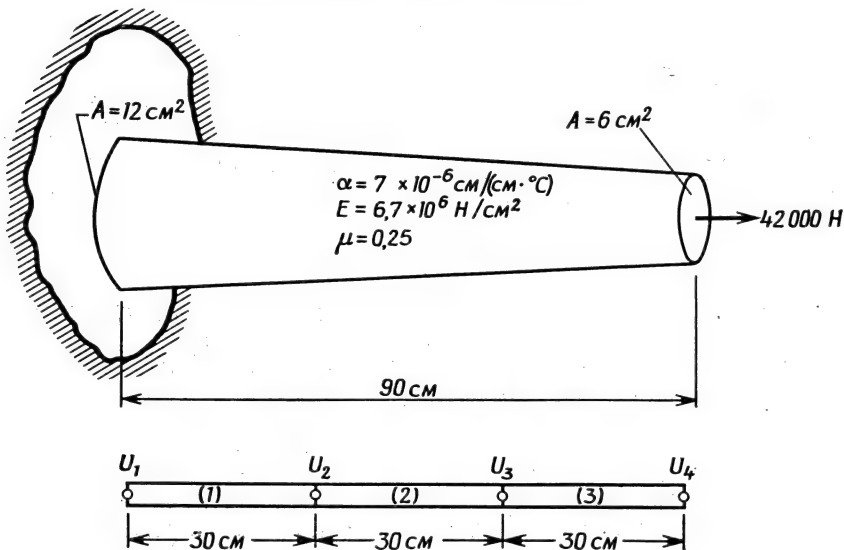
Все объемные интегралы должны быть вычислены заново, если площадь поперечного сечения меняется по длине элемента. В случае линейного изменения площади величину  $A$  в формулах (12.8)–(12.10) можно заменить средней площадью  $\bar{A} = (A_i + A_j)/2$ . Это выражение сразу же получается после замены  $A$  на  $\bar{A}$ .

$=N_i A_i + N_j A_j$  и вычисления интеграла. Подобное выражение может быть использовано для температуры, если она меняется линейно по длине. Нелинейные изменения учитываются с помощью интерполяционных полиномов, обсуждаемых в гл. 13. На следующем примере показано, как видоизменить определяющие элемент соотношения, чтобы они соответствовали линейному изменению площади элемента.

### Пример

108. Нужно вывести и решить систему линейных уравнений для узловых перемещений в конусообразной детали конструкции, один конец которой жестко закреплен, а другой подвержен действию нагрузки в 42 000 Н. Площадь поперечного сечения меняется линейно от 12 см<sup>2</sup> на левом конце до 6 см<sup>2</sup> на правом. Кроме того, деталь конструкции испытывает тепловое расширение вследствие повышения ее температуры на 20° равномерно по всей длине  $\alpha = 7 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ . Для аппроксимации рассматриваемой части конструкции следует использовать три элемента длиной 30 см каждый.

Площадь поперечного сечения в узловых точках имеет значения  $A_1 = 12 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 10 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 8 \text{ см}^2$  и  $A_4 = 6 \text{ см}^2$ . Первые три элемента свободны и от объемных, и от поверхностных нагрузок, поэтому матрицы этих элементов и векторы нагрузки определяются соответственно соотношениями (12.8) и (12.9).



К задаче 108.

Для первого элемента имеем

$$[k^{(1)}] = \frac{\bar{A}E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{11 \cdot 6,7 \cdot 10^6}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ = 10^6 \begin{bmatrix} 2,46 & -2,46 \\ -2,46 & 2,46 \end{bmatrix},$$

$$\{f^{(1)}\} = \alpha A E (\Delta T) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 6,7 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 20 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10318 \\ 10318 \end{Bmatrix}.$$

Уравнения, определяющие этот элемент, имеют вид

$$10^6 \begin{bmatrix} 2,46 & -2,46 \\ -2,46 & 2,46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10318 \\ 10318 \end{Bmatrix}.$$

Первый и второй элементы различаются только размером площади поперечного сечения. Для второго элемента средняя площадь равна 9 см<sup>2</sup>. Определяющие уравнения для второго элемента записываются как

$$10^6 \begin{bmatrix} 2,01 & -2,01 \\ -2,01 & 2,01 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8442 \\ 8442 \end{Bmatrix}.$$

Третьему элементу соответствуют уравнения, полученные с помощью соотношений (12.8) и (12.9), а также (12.12), поскольку этот элемент нагружен на конце.

$$10^6 \begin{bmatrix} 1,56 & -1,56 \\ -1,56 & 1,56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6566 \\ 6566 \end{Bmatrix} + 7000 \cdot 6 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6566 \\ 48566 \end{Bmatrix}.$$

Соотношения включения:

для первого элемента:  $i=1, j=2$ ,

для второго элемента:  $i=2, j=3$ ,

для третьего элемента:  $i=3, j=4$ .

Суммируя уравнения, определяющие элементы, получаем

$$10^6 \begin{bmatrix} 2,46 & -2,46 & 0 & 0 \\ -2,46 & 4,47 & -2,01 & 0 \\ 0 & -2,01 & 3,57 & -1,56 \\ 0 & 0 & -1,56 & 1,56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10318 \\ 1876 \\ 1876 \\ 48566 \end{Bmatrix}.$$

Первый узел расположен в неподвижно закрепленной точке, поэтому  $U_1=0$ , и приведенная система уравнений должна быть изменена с тем, чтобы учесть это граничное условие. В результате

имеем

$$10^6 \begin{bmatrix} -2,46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,47 & -2,01 & 0 \\ 0 & -2,01 & 3,57 & -1,56 \\ 0 & 0 & -1,56 & 1,56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1876 \\ 1876 \\ 48566 \end{bmatrix}.$$

Приведем решение этой системы:

$$\{U\}^T = [0, \quad 0,0207, \quad 0,0450, \quad 0,0753], \text{ см.}$$

Теоретическое решение этой задачи получается путем интегрирования деформации по длине. После выполнения этой процедуры получаем следующие значения для узловых перемещений:

$$U_1 = 0,0 \text{ см}, \quad U_3 = 0,046 \text{ см},$$

$$U_2 = 0,021 \text{ см}, \quad U_4 = 0,078 \text{ см}.$$

Перемещения, определенные методом конечных элементов, хорошо согласуются с теоретическими значениями. Еще более точные значения были бы получены при использовании элементов меньших размеров.

### 12.1.1. Напряжения в элементах

Определение напряжений является важной частью решения большинства задач теории упругости, потому что эти величины используются инженерами для расчета различных элементов конструкций. Результаты элемента, связанные с напряжениями, могут быть определены, как только вычислены деформации внутри элемента. Для одномерной задачи деформация  $\epsilon_{xx}$  дается формулой (12.6). Нормальное напряжение получается из закона Гука в форме (12.3).

Так как производные постоянны по элементу, деформация внутри отдельного элемента не меняется, что влечет в свою очередь в соответствии с законом Гука неизменность внутри элемента напряжения. Узловые значения  $\sigma_{xx}$  могут быть рассчитаны с помощью теории согласованных результатов элементов, представленной в гл. 6. Это делается аналогично тому, как было описано ранее. Компоненты тензора напряжений являются результатами элемента. Теория согласованных результатов элементов может быть использована также для определения узловых значений компонент тензора деформаций.

## Пример

109. Для детали конструкции, рассмотренной в предыдущем примере, нужно рассчитать узловые значения  $\sigma_{xx}$ , используя теорию согласованных результатов элементов.

Запишем вычисленные ранее узловые перемещения

$$\{U\}^T = [0, 0,0207, 0,0450, 0,0753].$$

Определим теперь деформацию элементов:

$$\text{первый элемент: } \epsilon_{xx} = \frac{1}{30} (-U_1 + U_2) = \frac{0,0207}{30} = 0,00069,$$

$$\text{второй элемент: } \epsilon_{xx} = \frac{-U_2 + U_3}{30} = \frac{-0,0207 + 0,0450}{30} = 0,00081,$$

$$\text{третий элемент: } \epsilon_{xx} = \frac{-U_3 + U_4}{30} = \frac{-0,0450 + 0,0753}{30} = 0,00101.$$

Напряжения в элементах даются формулой

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\epsilon_{xx} - \alpha E (\Delta T) = 6,7 \cdot 10^6 \epsilon_{xx} - \\ &- 7 \cdot 10^{-6} \cdot 6,7 \cdot 10^6 \cdot 20 = 6,7 \cdot 10^6 \epsilon_{xx} - 938. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $\epsilon_{xx}$ , получаем

$$\text{первый элемент: } \sigma_{xx}^{(1)} = 3685 \text{ Н/см}^2,$$

$$\text{второй элемент: } \sigma_{xx}^{(2)} = 4480 \text{ Н/см}^2,$$

$$\text{третий элемент: } \sigma_{xx}^{(3)} = 5820 \text{ Н/см}^2.$$

Уравнения теории согласованных результатов для элементов имеют вид

$$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{\sigma}_j \end{Bmatrix} = \frac{L\sigma_{xx}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

где  $\sigma_{xx}$  — вычисленный результат для конкретного элемента, а  $\bar{\sigma}_i$  и  $\bar{\sigma}_j$  — узловые значения  $\sigma_{xx}$  соответственно в узлах  $i$  и  $j$ . Запишем эти уравнения для каждого элемента отдельно:

$$\text{первый элемент: } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{\sigma}_j \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_{xx}^{(1)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1842,5 \\ 1842,5 \end{Bmatrix},$$

$$\text{второй элемент: } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{\sigma}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2244,5 \\ 2244,5 \end{Bmatrix},$$

$$\text{третий элемент: } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{\sigma}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2914,5 \\ 2914,5 \end{Bmatrix}.$$

Объединим эти уравнения, используя метод прямой жесткости:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1842,5 \\ 4087 \\ 5159 \\ 2914,5 \end{bmatrix}.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\{\bar{\sigma}\}^T = [3558, \quad 3935, \quad 5222, \quad 6132], \text{ Н/см}^2.$$

Теоретические значения напряжения  $\sigma_{xx}$  в узлах получаются делением величины приложенной нагрузки на площадь поперечного сечения в соответствующей узловой точке. Три множества значений  $\sigma_{xx}$  приведены в следующей таблице:

Номер узла	Теоретическое значение $\sigma_{xx}=P/A$ , Н/см <sup>2</sup>	Метод конечных элементов	
		согласованное напряжение, Н/см <sup>2</sup>	напряжение, постоянное по элементу, Н/см <sup>2</sup>
1	3500	3558	Первый элемент 3685 Второй элемент 4489 Третий элемент 5829
2	4200	3935	
3	5250	5222	
4	7000	6132	

Значения  $\sigma_{xx}$ , вычисленные по теории согласованных результатов, определенно лучше значений напряжения, постоянных по элементу, но они все же еще недостаточно близки к теоретическим значениям. Дальнейшее улучшение значений  $\sigma_{xx}$  может быть достигнуто путем применения элементов меньших размеров.

## 12.2. Двумерные задачи теории упругости

Двумерные задачи теории упругости намного сложнее одномерных, поскольку в случаях плоского напряженного или плоского деформированного состояния может иметь место анизотропия материала. Каждому из этих двух состояний соответствует своя матрица упругих характеристик  $[D]$ .

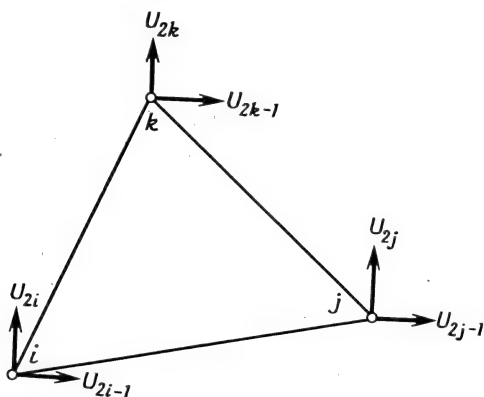
В плоских задачах теории упругости применим треугольный симплекс-элемент с шестью компонентами узловых перемещений

(фиг. 12.1). Перемещения  $u$  и  $v$  внутри элемента даются зависимостью

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (12.14)$$

Обозначения узловых перемещений показаны на фиг. 12.1. Функции формы, входящие в соотношения (12.14), определены в (3.10).

Будем считать, что рассматриваемая область располагается в плоскости  $xy$ , и введем следующие компоненты напряжения и деформации:  $\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}]$  и  $\{\epsilon\}^T = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}]$ . Для пло-



Фиг. 12.1. Компоненты перемещения для двумерного симплекс-элемента.

ского напряженного состояния, встречающегося во многих тонких телах, имеем  $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . Компоненты тензора деформации  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{xz}$  тоже равны нулю, но  $\epsilon_{zz}$  отлична от нуля и может быть получена из закона Гука, после того как определены  $\{\sigma\}$  и  $\{\epsilon\}$ . Говорят, что плоское деформированное состояние имеет место, когда компоненты деформации в направлении оси  $z$  равны нулю ( $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ). Компоненты тензора напряжений  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{zx}$  также равны нулю при плоской деформации, но  $\sigma_{zz}$  отлична от нуля и вычисляется с помощью закона Гука после того, как определены  $\{\sigma\}$  и  $\{\epsilon\}$ .

Соотношения связи между деформациями и перемещениями в двумерном случае имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

или с учетом (12.14)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (12.15)$$

Соотношения (12.15) определяют матрицу градиентов  $[B]$ , так как  $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ . Теперь есть почти все необходимое для вывода уравнений, определяющих элемент. Осталось только записать матрицу упругих характеристик  $[D]$  и вектор начальной деформации  $\{\varepsilon_0\}$ . В случае плоского напряженного состояния имеем

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (12.16)$$

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12.17)$$

В случае плоской деформации

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

и

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\mu) \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12.19)$$

Формулы (12.16) — (12.19) соответствуют изотропному материалу с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ .

Интегралы, на основе которых составляются уравнения, определяющие элемент, легко вычисляются, поскольку матрицы  $[B]$  и

$[D]$  содержат только константы. Вычислим объемный интеграл, представляющий матрицу жесткости:

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_V dV, \\ [k^{(e)}] = [B]^T [D] [B] tA. \quad (12.20)$$

Здесь  $t$  — толщина элемента,  $A$  — его площадь. Общее выражение для матричного произведения  $[B]^T [D] [B]$  не приведено из-за его громоздкой записи. Обычно поступают так: определяют числовые значения коэффициентов  $[B]$  и  $[D]$ , а затем ЭВМ выполняет указанное перемножение матриц. Интеграл, связанный с тепловым расширением, имеет вид

$$-\int_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV = -[B]^T [D] \epsilon_0 tA. \quad (12.21)$$

Матричное произведение в формуле (12.21) нетрудно составить. Для случая плоских напряжений получаем

$$[B]^T [D] \{\epsilon_0\} tA = \frac{\alpha E t (\Delta T)}{2(1-\mu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}. \quad (12.22)$$

Объемный интеграл от объемных сил аналогичен интегралу  $\int_V [N]^T \{Q\} dV$ , который был получен при рассмотрении задач теории поля. Основное отличие заключается в том, что теперь матрица  $[N]^T$  состоит из двух столбцов, так как имеются две объемные силы. Подставляя  $[N]^T$  и применяя  $L$ -координаты, получаем

$$\int_V \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dV = \frac{V}{3} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (12.23)$$

Интеграл от поверхностных нагрузок также аналогичен поверхностному интегралу в задачах теории поля. Рассматривая отдельно каждую из сторон элемента, можно записать три различных значения этого интеграла. Предположив, что на стороне между узлами  $i$  и  $j$  действуют равномерно распределенные нагрузки ин-

тенсивности  $p_x$  параллельно оси  $x$  и интенсивности  $p_y$  параллельно оси  $y$ , получим

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \int_S \begin{bmatrix} -N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS =$$

$$= \int_{S_{ij}} \begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \frac{S_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12.24)$$

где  $S_{ij}$  — площадь поверхности стороны элемента между узлами  $i$  и  $j$ ,  $S_{ij} = tL_{ij}$ . Компоненты результирующей силы в направлении координатных осей  $x$  и  $y$  равны соответственно  $p_x S_{ij}$  и  $p_y S_{ij}$ . Как видно из формул (12.24), на каждый из рассматриваемых узлов приходится по половине каждой компоненты результирующей силы.

На основе соотношений (12.20) — (12.24) строятся определяющие элемент уравнения для треугольного элемента из изотропного материала. Вычисление матриц элемента иллюстрируется на следующем примере.

## Пример

**110.** Нужно вывести определяющие элемент уравнения для изображенного ниже элемента в случае плоского напряженного состояния. Перпендикулярно к стороне  $jk$  действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $20 \text{ Н/см}^2$ . Элемент испытывает также тепловое расширение вследствие повышения его температуры на  $15^\circ$ .

Запишем матрицу градиентов

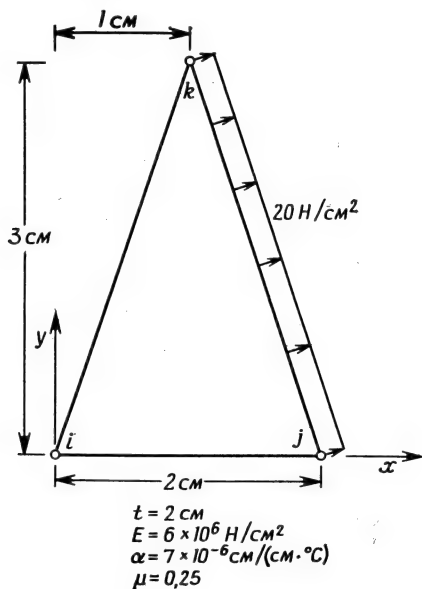
$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix},$$

где  $A = (3 \cdot 2)/2 = 3 \text{ см}^2$ ,

$$b_i = Y_j - Y_k = -3, \quad c_i = X_k - X_j = -1,$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 3, \quad c_j = X_i - X_k = -1,$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 0, \quad c_k = X_j - X_i = 2.$$



К задаче 110.

Подстановка числовых значений коэффициентов дает

$$[B] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица упругих констант в данном случае имеет вид

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} = \frac{6 \cdot 10^6}{1-0,25^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix},$$

$$[D] = \frac{6,4 \cdot 10^6}{8} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицу жесткости элемента

$$[k^{(e)}] = [B]^T [D] [B] tA,$$

$$[B]^T [D] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{6,4 \cdot 10^6}{8} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$[B]^T [D] = \frac{6,4 \cdot 10^6}{48} \begin{bmatrix} -24 & -6 & -3 \\ -2 & -8 & -9 \\ 24 & 6 & -3 \\ -2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \\ 4 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$[k^{(e)}] = \frac{tA6,4 \cdot 10^6}{288} \begin{bmatrix} -24 & -6 & -3 \\ -2 & -8 & -9 \\ 24 & 6 & -3 \\ -2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \\ 4 & 16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[k^{(e)}] = 13333 \begin{bmatrix} 75 & 15 & -69 & -3 & -6 & -12 \\ 15 & 35 & 3 & -19 & -18 & -16 \\ -69 & 3 & 75 & -15 & -6 & 12 \\ -3 & -19 & -15 & 35 & 18 & -16 \\ -6 & -18 & -6 & 18 & 12 & 0 \\ -12 & -16 & 12 & -16 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки элемента  $\{f^{(e)}\}$  обусловлен как тепловым воздействием, так и поверхностной нагрузкой. Вклад в вектор нагрузки теплового воздействия определяется величиной

$$\{f_{th}^{(e)}\} = [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} tA.$$

Учитывая формулу (12.22), имеем

$$\{f_{th}^{(e)}\} = \frac{7 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15}{2(1-0,25)} \begin{Bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2520 \\ -840 \\ 2520 \\ -840 \\ 0 \\ 1680 \end{Bmatrix}.$$

Вклад в  $\{f^{(e)}\}$  поверхностной нагрузки определяется следующим образом. Компоненты полной величины этой нагрузки распределяются поровну между узлами  $j$  и  $k$ . Длина стороны  $jk$  равна

$$\mathcal{L}_{jk} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10} = 3,163.$$

Компоненты внешней поверхностной нагрузки по осям  $x$  и  $y$  равны соответственно

$$p_x = p \cos \theta = 20 (3/3,163) = 18,97 \text{ Н/см}^2,$$

$$p_y = p \sin \theta = 20 (1/3,163) = 6,32 \text{ Н/см}^2.$$

Функция формы  $N_i$  обращается в нуль на стороне  $jk$ , поэтому

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \int_{S_{jk}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS = \frac{S_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

После подстановки  $p_x$ ,  $p_y$ , а также числового значения площади  $S_{jk} = 3,163 \cdot 2 = 6,326 \text{ см}^2$  и умножения матриц получаем

$$\{f_p^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 20 \\ 60 \\ 20 \end{Bmatrix}.$$

Теперь можно записать полную систему уравнений для элемента:

$$13333 \begin{bmatrix} 75 & 15 & -69 & -3 & -6 & -12 \\ & 35 & 3 & -19 & -18 & -16 \\ & & 75 & -15 & -6 & 12 \\ & & & 35 & 18 & -16 \\ & & & & 12 & 0 \\ \text{Симметрично} & & & & & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2520 \\ -840 \\ 2580 \\ -820 \\ 60 \\ 1700 \end{Bmatrix}.$$

Вектор-столбец  $\{f^{(e)}\}$  равен сумме  $\{f_{th}^{(e)}\} + \{f_p^{(e)}\}$ .

Для того чтобы проиллюстрировать применение формул (12.20)–(12.24), приведенного выше примера вполне достаточно. Нетрудно заметить, что здесь необходимо выполнить большой объем вычислений. Очевидно также, что выбирать в качестве ил-

люстрации пример, в котором рассматривается несколько элементов, непрактично.

Существуют два способа проверки правильности составления матрицы  $[k^{(e)}]$ . Прежде всего  $[k^{(e)}]$  должна быть симметричной матрицей с положительными коэффициентами на главной диагонали. Кроме того, сумма коэффициентов любой строки или столбца матрицы должна обращаться в нуль.

### 12.3. Трехмерные задачи теории упругости

Трехмерный симплекс-элемент в задачах теории упругости рассматривается почти так же, как двумерный элемент. Три компоненты перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  аппроксимируются внутри элемента соотношениями

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \end{Bmatrix}. \quad (12.25)$$

Двенадцать узловых значений изображены на фиг. 3.5 и воспроизводятся для удобства здесь (фиг. 12.2). Функции формы определены в гл. 3. В общей форме они записываются как

$$N_\beta = \frac{1}{6V} (a_\beta + b_\beta x + c_\beta y + d_\beta z), \quad (12.26)$$

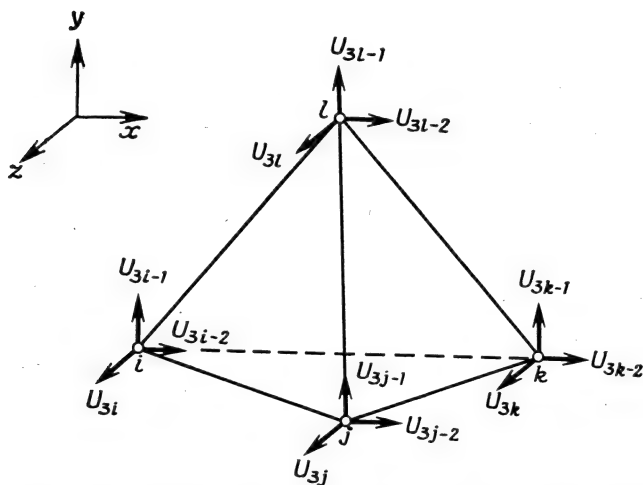
где  $a_\beta$ ,  $b_\beta$ ,  $c_\beta$  и  $d_\beta$  выражаются через координаты узлов.

Соотношения связи между перемещениями и деформациями в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Матрица градиентов  $[B]$  в формуле  $\{\epsilon\} = [B]\{U\}$  легко вычисляется дифференцированием (12.25) с последующим использованием зависимостей (12.27). Приведем здесь окончательный результат:

$$B = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_l \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_l & b_l & 0 \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_l & 0 & b_l \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_l & c_l \end{bmatrix}. \quad (12.28)$$



Фиг. 12.2. Компоненты перемещения для трехмерного симплекс-элемента.

Запишем компоненты вектора деформаций  $\{\epsilon\}$ :

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]. \quad (12.29)$$

Компоненты вектора напряжений  $\{\sigma\}$  должны располагаться в той же последовательности.

Матрица упругих характеристик  $[D]$  для трехмерного изотропного материала имеет вид

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & \mu/(1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \mu/(1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (12.30)$$

Симметрично

## Вектор начальной деформации

$$\{\epsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12.31)$$

Вычисление интегралов, определяющих матрицы элементов, не составляет труда, поскольку  $[B]$  и  $[D]$  содержат только постоянные члены и, следовательно, могут быть вынесены за знак интеграла. Для матрицы жесткости элемента имеем

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_V dV = [B]^T [D] [B] V. \quad (12.32)$$

Перемножение матриц выполняется ЭВМ. Вектор-столбец  $\{f^{(e)}\}$  представляется суммой трех интегралов, после вычисления которых имеем

$$\{f^{(e)}\} = \frac{V}{4} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ x \\ y \\ z \\ x \\ y \\ z \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \frac{\alpha V E (\Delta T)}{1 - 2\mu} [B]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{S_{ijk}}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}. \quad (12.33)$$

Из первого вектор-столбца видно, что объемные силы распределяются поровну между четырьмя узлами элемента. Второй вектор-столбец, соответствующий тепловому расширению материала, сохранен в виде произведения матриц, которое будет вычислять ЭВМ. Как видно из последнего вектор-столбца, поверхностные нагрузки распределяются поровну между тремя узлами стороны элемента, к которой приложены эти нагрузки. В формуле (12.33) предполагается, что указанная сторона определяется узлами  $i$ ,  $j$  и  $k$ , а  $S_{ijk}$  — ее площадь. Последние три члена в вектор-столбце равны нулю, потому что они связаны с интегралом  $\int N_i dS$ , а  $N_i$  равно нулю на этой стороне. Расположение нулевых членов в столбце

зависит от того, к какой стороне элемента приложены поверхностные нагрузки. Если поверхностные нагрузки действуют более чем на одной стороне элемента, в выражении для  $\{f^{(e)}\}$  появятся дополнительные вектор-столбцы.

## 12.4. Осесимметрические задачи теории упругости

Важный класс задач теории упругости включает задачи, в которых рассматриваются тела вращения при осесимметричном нагружении. Хотя такие тела и являются трехмерными, но ни их геометрия, ни условия нагружения не зависят от азимутальной координаты. Поэтому при решении может быть использован тот же подход, что и к двумерным задачам. Осесимметричный треугольный элемент, полученный вращением треугольного симплекс-элемента, образует треугольный тор.

Уравнения для элемента составляются почти так же, как в предыдущих трех разделах. Необходимо записать несколько новых соотношений, потому что удобнее использовать компоненты тензоров напряжения и деформаций в цилиндрической системе координат. Здесь представлены основные величины [1]: компоненты вектора напряжений

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{rz}], \quad (12.34)$$

компоненты вектора деформаций

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{rz}]. \quad (12.35)$$

Соотношения связи между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (12.36)$$

Схематически компоненты тензора напряжений показаны на фиг. 12.3. Заметим, что кольцевое нормальное напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  и деформация  $\varepsilon_{\theta\theta}$  также используются в расчетах.

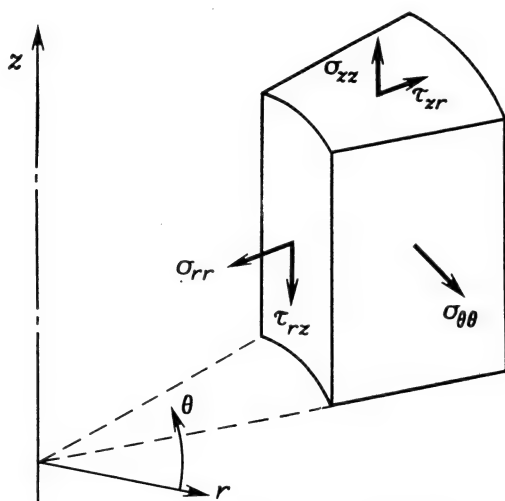
Предполагая материал изотропным, запишем матрицу упругих характеристик

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

и вектор начальной деформации, вызванной тепловым воздействием,

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Поле перемещений внутри элемента аппроксимируется соотношениями, идентичными (12.14), за исключением того, что функции



Фиг. 12.3. Компоненты напряжений в осесимметрических задачах.

формы теперь выражаются через  $r$  и  $z$ , а перемещения обозначаются буквами  $u$  и  $w$ . Итак, для перемещений имеем

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (12.37)$$

Дифференцируя (12.37) и используя соотношения связи между деформациями и перемещениями (12.36), получаем

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{N_j}{r} & 0 & \frac{N_k}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (12.38)$$

Матрица коэффициентов в (12.38) соответствует  $[B]$ , так как  $\{\varepsilon\} = [B] \{U\}$ .

Вычисление интегралов, определяющих матрицы элементов, несколько сложнее, чем это было в одномерных, двумерных и трехмерных задачах. Матрица  $[B]$  содержит теперь коэффициенты, являющиеся функциями координат, и не может быть вынесена за знак интеграла.

Матрицу жесткости можно определить, вычислив  $[B]$  по значениям  $r$  и  $z$  в центре элемента. Такой способ позволяет выносить матрицу  $[B]$  из-под интеграла:

$$[k^{(e)}] = [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \int_V dV.$$

Учитывая, что объем элемента дается формулой

$$V = 2\pi r A,$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения элемента, получаем для  $[k^{(e)}]$  окончательное выражение:

$$[k^{(e)}] = [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] 2\pi r A. \quad (12.39)$$

Черта над  $[B]$  указывает на приближенное значение. Формула (12.39) приближенная, но она дает приемлемые результаты, если разбиение на элементы согласуется с ожидаемым распределением напряжений, т. е. в области с большими значениями градиентов напряжений используются малые элементы и т. д.

Вектор-столбец, связанный с тепловым расширением, определяется точно так же, поскольку под интегралом стоит матрица  $[B]$ . Приближенное соотношение получается вычислением  $[\bar{B}]$  по значениям  $r$  и  $z$  для данного элемента. Приведем окончательный результат:

$$\{f_{th}^{(e)}\} = \frac{\alpha E (\Delta T)}{(1 - 2\nu)} [\bar{B}]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} 2\pi r A. \quad (12.40)$$

Объемный интеграл от объемных сил может быть проинтегрирован точно с использованием  $L$ -координат или приближенного

метода. Этот интеграл выражается через  $L$ -координаты следующим образом:

$$\{f_{\mathcal{R}}^{(e)}\} = \int_A \begin{bmatrix} rL_1 & 0 \\ 0 & rL_1 \\ rL_2 & 0 \\ 0 & rL_2 \\ rL_3 & 0 \\ 0 & rL_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{Z} \end{Bmatrix} 2\pi dA, \quad (12.41)$$

где  $dV$  заменено на  $2\pi r dA$ . Радиальное расстояние  $r$  также может быть выражено через  $L$ -координаты:

$$r = R_i L_1 + R_j L_2 + R_k L_3. \quad (12.42)$$

Подстановка выражения (12.42) в (12.41) приводит к произведениям типа  $L_i^2$  или  $L_i L_j$ , которые вычисляются с помощью формулы (3.43). Окончательно получаем

$$\{f_{\mathcal{R}}^{(e)}\} = \frac{2\pi A}{12} \begin{Bmatrix} (2R_i + R_j + R_k) & \mathcal{R} \\ (2R_i + R_j + R_k) & \mathcal{Z} \\ (R_i + 2R_j + R_k) & \mathcal{R} \\ (R_i + 2R_j + R_k) & \mathcal{Z} \\ (R_i + R_j + 2R_k) & \mathcal{R} \\ (R_i + R_j + 2R_k) & \mathcal{Z} \end{Bmatrix}. \quad (12.43)$$

Соотношение (12.43) подобно (10.29). Оно показывает, что компоненты объемной силы  $\mathcal{R}$  или  $\mathcal{Z}$  не распределяются в данном случае поровну между тремя узлами элемента. Большая часть приходится на узлы, наиболее удаленные от оси вращения.

Интеграл, включающий поверхностные нагрузки, вычисляется с помощью  $L$ -координат. Этот интеграл имеет вид

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} dS,$$

где  $p_r$  и  $p_z$  — компоненты поверхностной нагрузки в направлениях  $r$  и  $z$ . Рассматривая сторону между узлами  $i$  и  $j$ , вдоль которой  $N_k = 0$ , будем иметь

$$\int_S [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} dS = \int_{\mathcal{L}_{ij}} \begin{bmatrix} rL_1 & 0 \\ 0 & rL_1 \\ rL_2 & 0 \\ 0 & rL_2 \\ rL_3 & 0 \\ 0 & rL_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} 2\pi d\mathcal{L}, \quad (12.44)$$

где  $dS = 2\pi r d\mathcal{L}$ .

Последний интеграл вычисляется с помощью формулы (3.42) после подстановки выражения (12.42):

$$\{f_p^{(e)}\} = \frac{2\pi\mathcal{L}_{ij}}{6} \begin{Bmatrix} (2R_i + R_j)p_r \\ (2R_i + R_j)p_z \\ (R_i + 2R_j)p_r \\ (R_i + 2R_j)p_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12.45)$$

$\mathcal{L}_{ij}$  по-прежнему обозначает длину стороны между узлами  $i$  и  $j$ . Соотношение (12.45) обладает тем же самым свойством, что и (10.34), а именно оно применимо к поверхности, ориентированной произвольным образом. Если рассматривать вертикальную поверхность, то  $R_i = R_j = R$ ,

$$\{f_p^{(e)}\} = \frac{2\pi R_i \mathcal{L}_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \\ p_r \\ p_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12.46)$$

Формула (12.46) показывает, что компоненты нагрузки поровну распределяются между узлами. Этот результат идентичен тому, который получен для двумерной задачи. С другой стороны, если рассматривается горизонтальная поверхность,  $R_i \neq R_j$ , и тогда на наиболее удаленный от оси вращения узел будет приходиться большая часть нагрузки.

Две другие формы записи (12.45) получаются приравниванием нулю  $L_1$  (для стороны  $jk$ ) или  $L_2$  (для стороны  $ik$ ) в формуле (12.44) и последующим интегрированием.

Напряжения в элементах вычисляются по закону Гука:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - [D] \{\varepsilon_0\}.$$

С учетом формулы  $\{\varepsilon\} = [B] \{U\}$  напряжения могут быть выражены через узловые перемещения:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{U\} - [D] \{\varepsilon_0\}. \quad (12.47)$$

Записывая подробно равенство (12.47) или просто рассматривая (12.38), можно убедиться, что нормальные напряжения зависят от величины  $\varepsilon_{\theta\theta}$ , которая является функцией  $r$  и  $z$ , так как от  $r$  и  $z$  зависят коэффициенты матрицы  $[B]$ . Таким образом, можно вы-

числить напряжения во многих различных точках внутри элемента. Компонента напряжения сдвига, однако, не зависит от  $\epsilon_{\theta\theta}$  и оказывается постоянной внутри каждого элемента.

## 12.5. Решение с помощью ЭВМ

Представленная на фиг. 7.3 блок-схема вычислений применима с незначительными изменениями к решению двумерных задач теории упругости для изотропного материала. Изменения касаются ввода средней температуры каждого элемента, когда это необходимо для анализа. Эти исходные данные вводятся перед началом цикла, в котором составляются глобальные матрицы. Осуществление указанной модификации в программе должно сопровождаться некоторым целочисленным переменным параметром, который указывает на необходимость ввода температурных данных или исключает его.

Средняя по элементу температура вычисляется путем усреднения узловых значений температуры для каждого элемента, если только температурное распределение известно. Если распределение температуры в теле определялось с помощью метода конечных элементов, средняя по элементу температура может быть пробита на перфокартах вместе с информацией, предназначенной для упругой задачи. Такой способ применим, если только разбиение области на элементы при решении задачи переноса тепла совпадает с разбиением, используемым для решения задачи теории упругости.

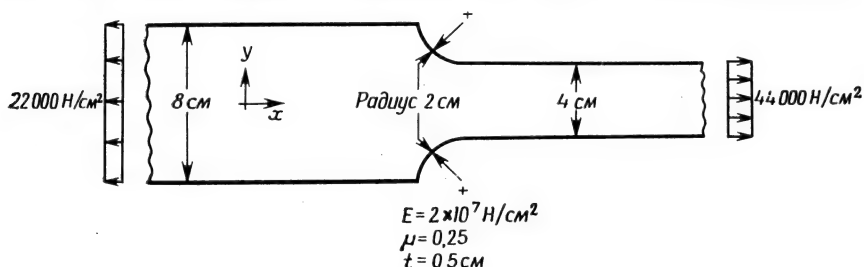
Определение напряжений в элементе обычно сопровождается вычислением главных напряжений, так как эти величины представляют интерес при расчете конструкции. При решении двумерных задач можно рассматривать плосконапряженное или плоскодеформированное состояние. Различие при этом заключается только в написании матрицы упругих характеристик  $[D]$ . Оба случая могут быть объединены в одной программе использованием условного оператора IF, который позволяет выбирать правильную матрицу.

Машинная реализация осесимметрической задачи теории упругости почти идентична реализации на ЭВМ двумерной задачи. Поскольку ни плоская деформация, ни плоское напряжение не имеют отношения к осесимметрическому случаю, матрицу упругих констант здесь выбирать не приходится. Координаты элемента в осесимметрической задаче должны быть отнесены к глобальной системе координат. Для одномерной, двумерной или трехмерной задач координаты элемента могут быть отнесены либо к местной, либо к глобальной системе координат.

В гл. 18 представлена учебная программа, позволяющая исследовать плосконапряженное состояние упругого тела. Применение этой программы иллюстрирует следующий пример.

### 12.5.1. Постановка задачи

Требуется определить коэффициент концентрации напряжений, вызванной круговой выточкой, при осевом нагружении детали конструкции, показанной на фиг. 12.4. Ширина детали меняется от 8 до 4 см, толщина всюду одинакова и равна 0,50 см. Нормальное



Фиг. 12.4. Осевое нагружение детали конструкции с выточкой.

напряжение в точках сечения, расположенного справа от выточек на достаточно большом расстоянии, достигает величины 44 000 Н/см². Деталь сделана из стали с модулем упругости  $2 \cdot 10^7$  Н/см² и коэффициентом Пуассона 0,25.

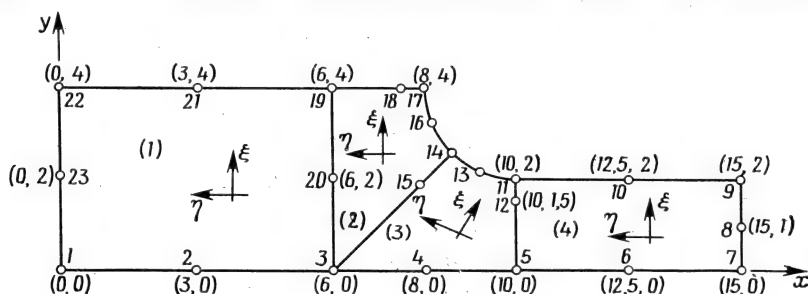
### 12.5.2. Решение на ЭВМ

Исходные данные об элементах могут быть получены с помощью программы GRID. Предварительное разбиение на зоны и размещение узлов для программы GRID показаны на фиг. 12.5. В силу симметрии исходной задачи далее рассматривается только половина детали. Наличие однородного напряженного состояния на большей части детали позволяет отказаться от построения дискретной модели для всей области и ограничиться участком, левая граница которого удалена на 8 см влево от выточки, а правая расположена на 5 см правее выточки. Теоретический анализ концентрации напряжений показывает, что выбранные размеры участка, вероятно, достаточно велики, чтобы на его границах установилось равномерное распределение напряжений.

В первой зоне локальная координата  $\xi$  выбрана параллельной направлению меньшего размера детали с тем, чтобы последовательная нумерация узлов элементов производилась в направлении меньшего размера. Выбор такого направления для  $\xi$  приводит к наименьшей ширине полосы матрицы системы уравнений. Окончательное разбиение области на элементы показано на фиг. 12.6.

В задачах теории упругости глобальная матрица жесткости  $[K]$  получается сингулярной, если только в теле не заданы какие-либо перемещения. Задание перемещений должно исключать дви-

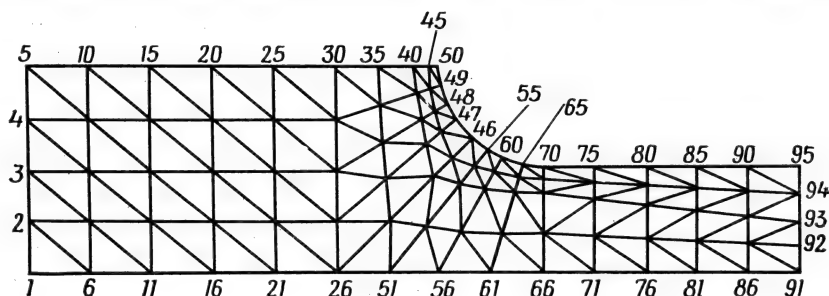
жение тела как абсолютно твердого, т. е. смещение и вращение его как целого. В рассматриваемом случае это может быть достигнуто закреплением первого узла и запрещением вертикального движения узла 91. В данном примере необходимо, кроме того, исключить



Фиг. 12.5. Предварительное разбиение области на зоны, используемое программой GRID для получения исходных данных элементов.

Узел	Координаты
13	(9,235, 2,152)
14	(8,586, 2,586)
15	(7,879, 1,879)
16	(8,152, 3,235)
18	(7,5, 4,0)

возможность горизонтального перемещения точек левой границы области. Это означает, что  $U_3 = U_5 = U_7 = U_9 = 0$ . Вертикальные перемещения точек этой границы определяются из решения задачи. Ось симметрии (нижняя граница области) должна совпадать с осью  $x$ , поэтому точки этой границы не могут перемещаться в вертикальном направлении (параллельно оси  $y$ ). Вообще в рассмат-



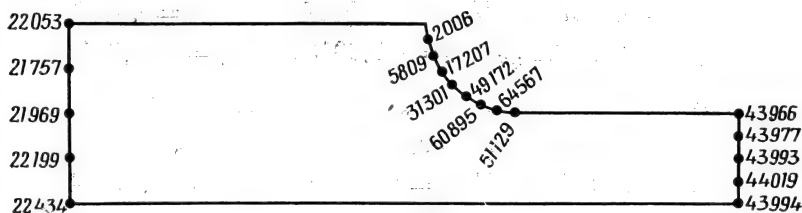
Фиг. 12.6. Окончательное разбиение на элементы и номера граничных узлов.

риваемом случае фиксированы 20 узловых перемещений, каждое из них равно нулю.

На правой границе области приложена нагрузка интенсивности  $p_x = 44\,000 \text{ Н/см}^2$ . Эта нагрузка равномерно распределяется по четырём элементам. Площади сторон, подверженных действию внешней нагрузки, в каждом из этих элементов одинаковы и равны  $0,25 \text{ см}^2$ . Узловые значения нагрузки для каждого элемента соответствуют по величине  $(0,25 \text{ см}^2 \times 44\,000 \text{ Н/см}^2)/2$ , или  $5500 \text{ Н}$ . В следующей таблице приведены номера узловых перемещений и значения узловых сил, предназначенные для ввода в качестве исходных данных.

Номер узлового перемещения	Узловая сила, Н
181	5500
183	11000
185	11000
187	11000
189	5500

В результате вычислений для горизонтальных перемещений в узловых точках правой границы получаем одинаковые значения, равные  $0,0247 \text{ см}$ . Это дает основание считать, что область однородной деформации, а следовательно, и напряжения достигнута и что была выбрана приемлемая длина дискретной модели.



Фиг. 12.7. Узловые значения  $\sigma_1$  в зоне выточки и на концах детали.

Компоненты напряжения, соответствующие решению задачи, постоянны для каждого отдельного элемента. Узловые значения этих величин могут быть получены с помощью теории согласованных результатов элемента, рассмотренной в гл. 6. Узловые значения наибольшего главного напряжения в зоне выточки представлены на фиг. 12.7. Максимальное значение имеет место в 65-м узле и равно  $64\,576 \text{ Н/см}^2$ . Коэффициент концентрации напряжений, определяемый как отношение максимального напряжения к на-

грузке ( $44\,000\text{ Н/см}^2$ ), составляет 1,47, что хорошо согласуется с величиной 1,42, приведенной в работе [1] (табл. 13.1). Этот пример опять будет рассмотрен в гл. 16.

## Задачи

110. Ниже приведены координаты узлов и узловые перемещения для некоторых из элементов, изображенных на фиг. 12.6. Определите напряжения в элементах, если  $E=20 \cdot 10^6\text{ Н/см}^2$ ,  $\mu=0,25$ . Координаты и перемещения даны в сантиметрах. Толщина элементов равна 0,5 см.

111. $X_i=2,4$	$X_j=1,2$	$X_k=1,2$
$Y_i=0,0$	$Y_j=1,0$	$Y_k=0,0$
$U_{2i-1}=0,00272$	$U_{2j-1}=0,00134$	$U_{2k-1}=0,00135$
$U_{2i}=0,0$	$U_{2j}=-0,00033$	$U_{2k}=0,0$

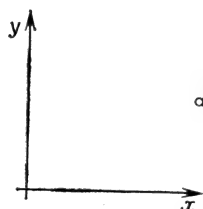
112. $X_i=3,6$	$X_j=2,4$	$X_k=2,4$
$Y_i=3,0$	$Y_j=4,0$	$Y_k=3,0$
$U_{2i-1}=0,00388$	$U_{2j-1}=0,00262$	$U_{2k-1}=0,00261$
$U_{2i}=-0,00109$	$U_{2j}=-0,00127$	$U_{2k}=-0,00099$

113. $X_i=6,6$	$X_j=6,87$	$X_k=6,0$
$Y_i=3,26$	$Y_j=4,0$	$Y_k=4,0$
$U_{2i-1}=0,00676$	$U_{2j-1}=0,00637$	$U_{2k-1}=0,00594$
$U_{2i}=-0,00132$	$U_{2j}=-0,00139$	$U_{2k}=-0,00148$

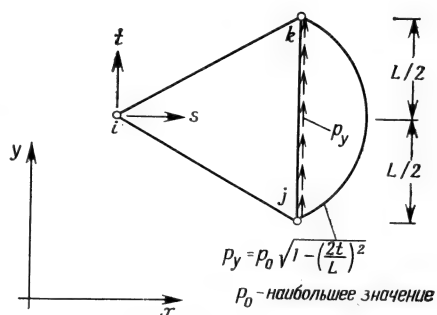
114. $X_i=9,0$	$X_j=8,53$	$X_k=8,0$
$Y_i=0,0$	$Y_j=0,95$	$Y_k=0,0$
$U_{2i-1}=0,01215$	$U_{2j-1}=0,01113$	$U_{2k-1}=0,01044$
$U_{2i}=0,0$	$U_{2j}=-0,00025$	$U_{2k}=0,0$

115. $X_i=11,0$	$X_j=10,0$	$X_k=10,0$
$Y_i=1,8$	$Y_j=1,875$	$Y_k=1,5$
$U_{2i-1}=0,01592$	$U_{2j-1}=0,01354$	$U_{2k-1}=0,1366$
$U_{2i}=-0,00079$	$U_{2j}=-0,00061$	$U_{2k}=-0,00042$

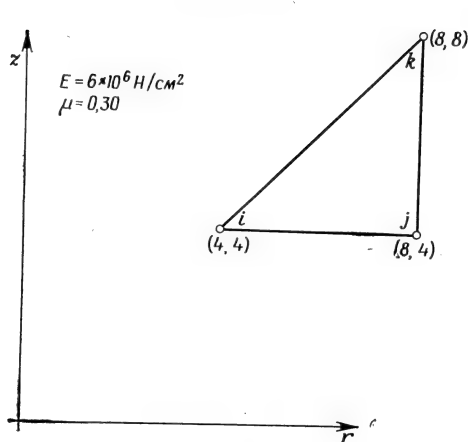
116. Вычислите поверхностный интеграл  $\int_S [N]^T \{ \begin{smallmatrix} p_x \\ p_y \end{smallmatrix} \} dS$  в случае поверхностного нагружения, схематически показанного ниже.



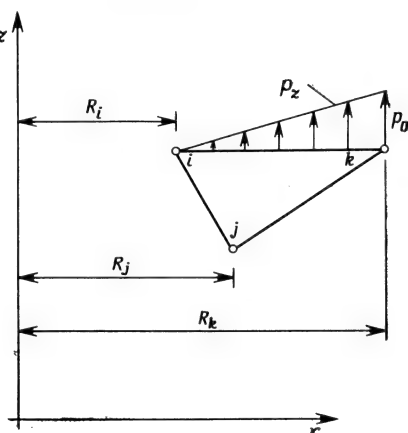
К задаче 116.



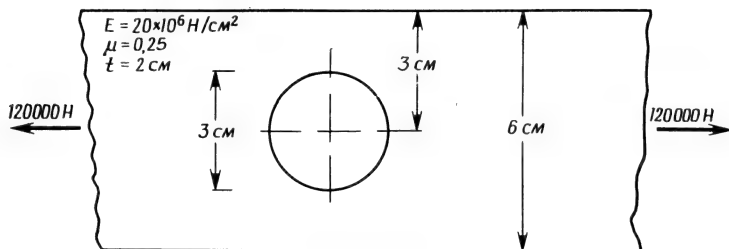
К задаче 117.



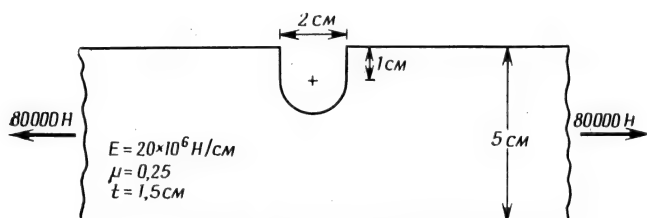
К задаче 118.



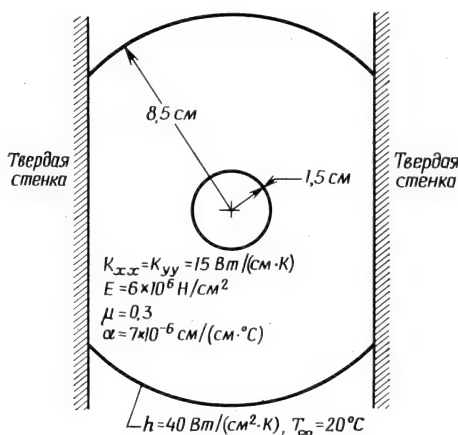
К задаче 119.



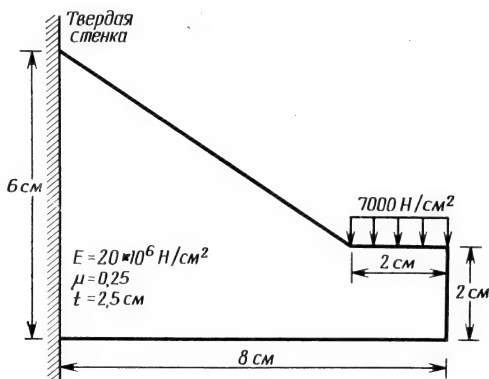
К задаче 120



К задаче 121.



К задаче 122. Во внутренней полости поддерживаются давление 350 Н/см<sup>2</sup> и температура 50 °С. Решите задачу о плоском напряженном состоянии.



К задаче 123.

117. Вычислите поверхностный интеграл в задаче 116 для случайной нагрузки, показанной на рисунке.

118. Составьте матрицу жесткости для осесимметричного элемента, изображенного на рисунке.

119. Вычислите поверхностный интеграл в задаче 116 для переменной поверхностной нагрузки, приложенной к горизонтальной поверхности осесимметричного элемента.

120—123. Определите распределение напряжений в одном из представленных выше тел. Получите исходную информацию об элементах с помощью программы разбиения GRID.

124. Вычислите узловые значения компонент напряжений в одной из задач 120—123. Напряжения в элементах должны быть отперфорированы программой STRESS с тем, чтобы затем ввести их в программу CONSTR.

125. Измените программу STRESS так, чтобы ее можно было использовать для решения осесимметрических задач.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Fung Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Singer G. L., Strength of Materials, 2-nd ed., Harper and Row, N. Y., 1962.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Cooke R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, N. Y., 1974.

Martin H. C., Carey G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, N. Y., 1973.

Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 13

### ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. ОДНОМЕРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В шести предыдущих главах при обсуждении различных областей применения метода конечных элементов использовались симплекс-элементы. Другой подход к прикладным задачам состоит в применении элементов высокого порядка, т. е. комплекс- или мультиплекс-элементов. Напомним, что число узлов в таких элементах превышает размерность решаемой задачи более чем на единицу. При таком подходе для достижения заданной степени точности решения требуется меньшее количество элементов, что приводит к сокращению числа перфокарт с исходными данными об элементах, а это в свою очередь уменьшает вероятность ошибки при обработке данных. Применение элементов высокого порядка не всегда, однако, ведет к сокращению полного времени счета на ЭВМ. Для составления матриц элемента необходимо использовать методы численного интегрирования, которые требуют выполнения большого числа арифметических операций и, следовательно, увеличивают полное время счета, затрачиваемое на обработку одного элемента. Однако эти дополнительные затраты машинного времени компенсируются, вероятно, экономией времени в процессе обработки исходных данных.

В тех прикладных областях, где градиенты искомых величин не могут быть надлежащим образом аппроксимированы системой кусочно-постоянных функций, использование элементов высоких порядков позволяет получать более точные результаты.

Сокращение времени обработки исходных данных в сочетании с большей точностью результатов расчета служит достаточным основанием для изучения возможностей применения указанных элементов.

В этой главе основное внимание будет сосредоточено на обсуждении одномерного элемента. В первом разделе рассматриваются функции формы, второй раздел иллюстрирует применение квадратичного элемента. Использование естественной системы координат и методы численного интегрирования обсуждаются в третьем и четвертом разделах, причем эти вопросы включены в данную главу потому, что при рассмотрении одномерного элемента упрощается иллюстрация их реализации. Действительная необходимость в методах численного интегрирования будет пояснена в

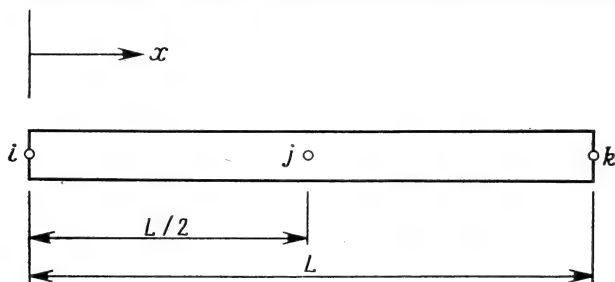
следующих двух главах, где рассматриваются треугольный и четырехугольный элементы. Данная глава заканчивается введением в теорию изопараметрических элементов.

### 13.1. Квадратичные и кубические элементы

Аппроксимирующий полином в общей форме для одномерного элемента имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_r x^{r-1}, \quad (13.1)$$

где  $r$  — число узлов элемента. Рассмотрим элемент с тремя узлами, причем один из его узлов расположен посередине между край-



Фиг. 13.1. Одномерный квадратичный элемент.

ними точками (фиг. 13.1). Ему соответствует интерполяционный полином

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \quad (13.2)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  определяются из условий

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \quad \text{при} \quad x=0, \\ \varphi &= \Phi_j \quad \text{при} \quad x=\frac{L}{2}, \\ \varphi &= \Phi_k \quad \text{при} \quad x=L. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Так же как в гл. 3, эти условия приводят к алгебраической системе уравнений, решив которую, находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Phi_i, \\ \alpha_2 &= \frac{4\Phi_i - 3\Phi_j - \Phi_k}{L}, \\ \alpha_3 &= \frac{2}{L^2} (\Phi_i - 2\Phi_j + \Phi_k). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Подставив выражение (13.4) в (13.2) и выполнив некоторые преобразования, получим

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (13.5)$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \\ N_j &= \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \\ N_k &= -\frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что эти функции формы удовлетворяют критерию, установленному в гл. 3:

$$\sum_{\beta=i}^r N_{\beta} = 1, \quad \beta = i, j, k, \dots, r. \quad (13.6)$$

Только что описанная процедура определения коэффициентов  $\alpha$  становится утомительной при большом числе узлов. Другой способ определения функций формы состоит в использовании формул (13.6) и еще двух дополнительных свойств функции формы:

$$N_{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{в узле с номером } \beta, \\ 0 & \text{во всех других узлах, отличных от } \beta, \end{cases} \quad (13.7)$$

и

$$N_{\beta} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_r x^{r-1}. \quad (13.8)$$

Первое свойство уже обсуждалось в предыдущих главах. Второе свойство, хотя и не рассматривалось ранее, очевидным образом следует из того факта, что все  $\alpha_{\beta}$  в (13.1) могут быть записаны в виде линейных комбинаций  $\Phi_{\beta}$ . Например, формулы

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_i \Phi_i + a_j \Phi_j + a_k \Phi_k, \\ \alpha_2 &= b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k, \\ \alpha_3 &= c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k \end{aligned} \quad (13.9)$$

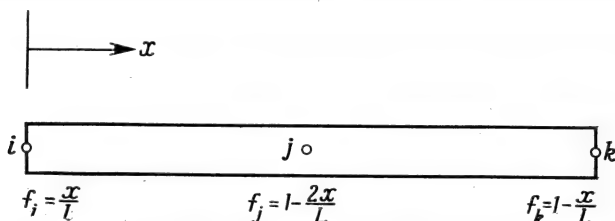
можно использовать для элемента с тремя узлами. Сравнивая формулы (13.9) и (13.4), можно заметить, что

$$\begin{aligned} a_i &= 1, & a_j &= a_k = 0, \\ b_i &= \frac{4}{L}, & b_v &= -\frac{3}{L}, & b_k &= -\frac{1}{L} \end{aligned}$$

и

$$c_i = \frac{2}{L^2}, \quad c_j = -\frac{4}{L^2}, \quad c_k = \frac{2}{L^2}.$$

Таким образом, если в интерполяционном полиноме (13.2) заменить  $\alpha$  линейными комбинациями узловых значений  $\Phi_\beta$ , то после надлежащей перегруппировки получим, что функции формы должны быть такого же типа, как аппроксимирующая функция. Напри-



Фиг. 13.2. Узловые функции для квадратичного элемента.

мер, функции формы (13.5) могут быть записаны в форме  $N_\beta = a_\beta + b_\beta x + c_\beta x^2$ , совпадающей по виду с многочленом (13.2).

Выражение (13.8) может быть представлено в виде произведения сомножителей типа

$$\psi_1 + \psi_2 x, \quad (13.10)$$

или

$$N_i = (\psi_1 + \psi_2 x)(\psi_3 + \psi_4 x) \dots (\psi_{2r-1} + \psi_{2r} x). \quad (13.11)$$

Найти произвольные константы в (13.11) просто, если заметить, что  $N = 0$  во всех узлах, отличных от узла  $\beta$ . Это требование может быть удовлетворено за счет подбора сомножителей в (13.11) таким образом, чтобы каждый из них обращался в нуль в одном из узлов. Совокупность функций  $f_i$ , каждая из которых обращается в нуль в определенном узле, показана для квадратичного элемента на фиг. 13.2. Положим

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{x}{L}, \\ f_j &= 1 - \frac{2x}{L}, \\ f_k &= 1 - \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (13.12)$$

и определим функцию  $F_\delta$  следующим образом:

$$F_\delta = \begin{cases} f_\delta, & \text{если } \delta \neq \beta \text{ для } N_\beta, \\ 1, & \text{если } \delta = \beta \text{ для } N_\beta \\ (\beta \text{ фиксировано, } \delta = i, j, k, \dots, r). \end{cases}$$

Представим  $N_\beta$  в виде

$$N_\beta = \Gamma \prod_{\delta=i}^r F_\delta, \quad (13.13)$$

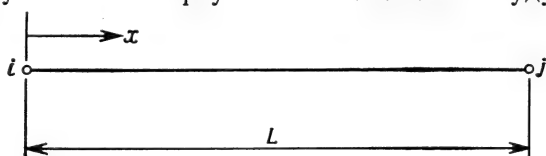
где

$$\prod_{\delta=i}^r = F_i \cdot F_j \cdot F_k \cdot \dots \cdot F_r,$$

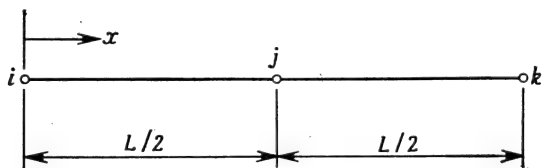
$r$  — число узлов элемента,  $\Gamma$  — произвольная константа, определяемая из условия, что  $N_\beta = 1$  в узле  $\beta$ . Функция формы  $N_\beta$  дается формулой

$$N_\beta = \prod_{\delta=i}^r \frac{F_\delta}{F_\delta|_{x=x_\beta}}. \quad (13.14)$$

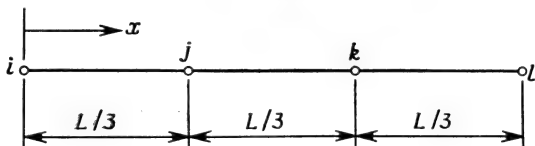
Описанная здесь процедура может быть обобщена на двумерные и трехмерные элементы. Соотношения, аналогичные (13.14), для четырехугольного и треугольного элементов будут даны ниже.



а) Линейный



б) Квадратичный



в) Кубичный

Фиг. 13.3. Линейный, квадратичный и кубичный одномерные элементы.

а)  $N_i = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_j = \frac{x}{L};$

б)  $N_i = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_j = \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_k = -\frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right);$

в)  $N_i = \left(1 - \frac{3x}{L}\right) \left(1 - \frac{3x}{2L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_j = \frac{9x}{L} \left(1 - \frac{3x}{2L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right);$

$N_k = -\frac{9x}{2L} \left(1 - \frac{3x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_l = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{3x}{L}\right) \left(1 - \frac{3x}{2L}\right).$

На фиг. 13.3 приведены выражения функций формы для линейного, квадратичного и кубического элементов в одномерном случае.

### Пример

126. С помощью формул (13.14) и (13.12) требуется определить функции формы квадратичного одномерного элемента для узлов  $i$  и  $j$ .

Начнем с узла  $i$ . Имеем  $\beta=i$  и  $X_\beta=X_i=0$ . Функциям  $F_\delta$ ,  $\delta=i, j, k$  соответствуют выражения

$$F_i=1, \text{ так как } \delta=i=\beta,$$

$$F_j=f_j=(1-2x/L),$$

$$F_k=f_k=(1-x/L).$$

Вычисляя значения этих функций в точке  $x=X_\beta=0$ , получаем

$$F_j|_{x=0}=1 \text{ и } F_k|_{x=0}=1.$$

Подстановка в формулу (13.14) дает

$$N_i = \frac{1}{1} \frac{[1-(2x/L)]}{1} \frac{[1-(x/L)]}{1} = \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

что совпадает с (13.5).

Повторяя выкладки для центрального узла  $j$ , имеем  $\beta=j$ ,  $x=X_j=L/2$ ,

$$F_i = \frac{x}{L}, \quad F_j=1, \quad F_k=1 - \frac{x}{L}$$

и

$$N_j = \frac{(x/L)}{(1/2)} \frac{1}{1} \frac{[1-(x/L)]}{(1/2)} = \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

## 13.2. Применение квадратичного элемента

Элементы высокого порядка применяются так же, как симплекс-элементы, поскольку выбор интерполяционного полинома не связан с исходными дифференциальными уравнениями. Однако есть смысл рассмотреть применение квадратичного элемента, который обсуждался в предыдущем разделе, с тем, чтобы закрепить наши знания, связанные с реализацией метода конечных элементов.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу переноса тепла из гл. 8. Задача состоит в том, чтобы определить распределение температуры по длине стержня, подверженного конвективному теплообмену.

Уравнения для элемента, выведенные в гл. 5, имеют вид

$$[k^{(e)}] \{T\} = \{f^{(e)}\}, \quad (13.15)$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_S h [N]^T [N] dS$$

и

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{S_1} q [N]^T dS + \int_{S_2} h T_\infty [N]^T dS + \int_V Q [N]^T dV.$$

Так как мы пользуемся квадратичным элементом вместо линейного элемента, который применялся в гл. 8, все интегралы в (13.15) должны быть вычислены заново.

Во внутренних точках элемента температура определяется с помощью матрицы функций формы  $[N]$ :

$$T = [N] \{T\} = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}. \quad (13.16)$$

Матрица градиентов имеет вид

$$[g] = \frac{dT}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} & \frac{dN_k}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}. \quad (13.17)$$

С помощью функций формы в (13.5) получаем

$$\{g\} = \left[ \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right), \left( \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right), \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \right] \{T\}.$$

Учитывая, что в данном случае  $[D] = [K_{xx}]$  и  $dV = A dx$ , интеграл

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV$$

запишем в виде

$$K_{xx} A \int_0^L \begin{bmatrix} \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right)^2 & \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left( \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right) & \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \\ \left( \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right)^2 & \left( \frac{4x}{L} - \frac{8x}{L^2} \right) \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \\ \text{Симметрично} & \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right)^2 \end{bmatrix} dx.$$

Отсюда имеем

$$[k^{(e)}] = \frac{AK_{xx}}{6L} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}, \quad (13.18)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения элемента. Конвективная часть  $[k^{(e)}]$  дается формулой

$$\begin{aligned} \int_{S_2} h[N]^T [N] dS &= Ph \int_0^L \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dx = \\ &= \frac{PhL}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13.19)$$

где  $P$  — периметр элемента. Конвективная составляющая вектор-столбца  $\{f^{(e)}\}$  имеет вид

$$\int_{S_2} hT_{\infty} [N]^T dS = PhT_{\infty} \int_0^L \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right) \\ \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right) \\ \left(\frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right) \end{Bmatrix} dx = \frac{PhT_{\infty} L}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13.20)$$

Если конвективный теплообмен наблюдается на конце элемента, например в узле  $i$ , то  $N_i=1$ ,  $N_j=N_k=0$  и поверхностный интеграл принимает вид

$$hT_{\infty} \int_{S_2} [N]^T dS = hT_{\infty} A_i \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (13.21)$$

где  $A_i$  — площадь поверхности в узле  $i$ . Наличие теплообмена в узле  $i$  сказывается и на матрице теплопроводности  $[k^{(e)}]$  благодаря поверхностному интегралу

$$\int_{S_2} h[N]^T [N] dS = h \int_{S_2} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS. \quad (13.22)$$

Интегрируя по поверхности, содержащей узел  $i$ , получаем

$$\int_{S_2} h[N]^T [N] dS = A_i h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.23)$$

Интеграл от теплового потока  $q$  идентичен уже вычисленному интегралу (13.21), поэтому можно сразу записать

$$\int_{S_1} q[N]^T dS = A_i q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (13.24)$$

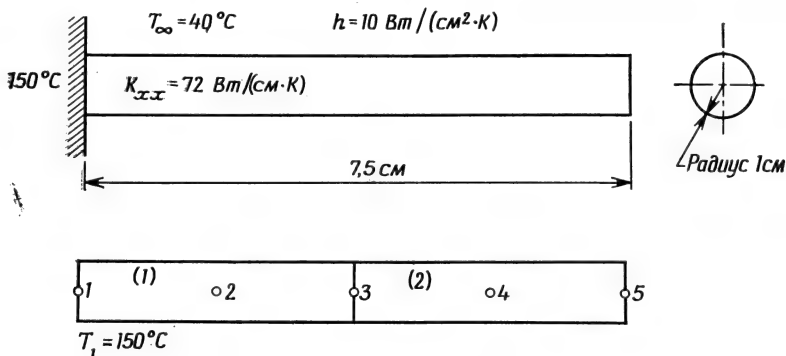
где  $q$  — заданный поток в узле  $i$ . Объемный интеграл, включающий источник тепла  $Q$ , вычисляется также легко:

$$\int_V [N]^T Q dV = A Q \int_0^L \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dx = \frac{AQL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (13.25)$$

Применение полученных соотношений иллюстрируется ниже на примере того же стержня кругового сечения, который был рассмотрен в гл. 8 (стр. 139).

### Пример

127. Нужно определить распределение температуры в стержне кругового сечения, изображенном ниже.



К задаче 127.

Запишем матрицы теплопроводности

$$k^{(1)} = \frac{K_{xx}^{(1)} A^{(1)}}{6L^{(1)}} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} + \frac{2\pi r^{(1)} h^{(1)} L^{(1)}}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{и} \quad [k^{(2)}] = [k^{(1)}] + A_k^{(2)} h^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[k^{(2)}]$  содержит дополнительное слагаемое в связи с тем, что на свободном конце второго элемента тоже происходит теплообмен. Для вектор-столбцов  $\{f^{(1)}\}$  и  $\{f^{(2)}\}$  имеем

$$\{f^{(1)}\} = \frac{2\pi r^{(1)} L^{(1)} h T_{\infty}}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

и

$$\{f^{(2)}\} = \{f^{(1)}\} + AhT_{\infty} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

После подстановки числовых значений исходных данных получаем

$$[k^{(1)}] = \pi \begin{bmatrix} 54,8 & -46,2 & 3,9 \\ -46,2 & 142,4 & -46,2 \\ 3,9 & -46,2 & 54,8 \end{bmatrix},$$

$$\{f^{(1)}\} = \pi \begin{Bmatrix} 500 \\ 2000 \\ 500 \end{Bmatrix},$$

$$[k^{(2)}] = \pi \begin{bmatrix} 54,8 & -46,2 & 3,9 \\ -46,2 & 142,4 & -46,2 \\ -3,9 & -46,2 & 64,8 \end{bmatrix},$$

$$\{f^{(2)}\} = \pi \begin{Bmatrix} 500 \\ 2000 \\ 900 \end{Bmatrix}.$$

Соотношения, включающие эти элементы в единую дискретную модель, имеют вид

первый элемент:  $i=1, j=2, k=3,$

второй элемент:  $i=3, j=4, k=5.$

Объединение уравнений, определяющих отдельные элементы, произведем методом прямой жесткости. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} 54,8 & -46,2 & 3,9 & 0 & 0 \\ -46,2 & 142,4 & -46,2 & 0 & 0 \\ 3,9 & -46,2 & 109,6 & -46,2 & 3,9 \\ 0 & 0 & -46,2 & 142,4 & -46,2 \\ 0 & 0 & 3,9 & -46,2 & 64,8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 500 \\ 2000 \\ 1000 \\ 2000 \\ 900 \end{Bmatrix}.$$

Так как  $T_1 = 150^\circ\text{C}$  задана, эта система уравнений должна быть предварительно модифицирована. Модифицированная система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 54,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 142,4 & -46,2 & 0 & 0 \\ & & 109,6 & -46,2 & 3,9 \\ & & & 142,4 & -46,2 \\ \text{Симметрично} & & & & 64,8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8220 \\ 8930 \\ 415 \\ 2000 \\ 900 \end{Bmatrix}.$$

Решая эту систему, получаем следующие значения температуры в узловых точках:

$$\{T\}^T = [150, 80,8 \ 55,8, 46,3 \ 43,5], \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Эти значения хорошо согласуются с аналитическим решением исходной задачи:

$$\{T_{\text{аналитическое}}\}^T = [150, 80,9, 55,4, 46,2, 43,3], \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся матриц квадратичного элемента. Во-первых, поверхностный интеграл, который используется при составлении матрицы теплопроводности

$$\int_{S_1} h[N]^T [N] dS,$$

содержит несколько отрицательных коэффициентов, чего не было в случае линейного элемента с двумя узлами. Отрицательные члены встречаются при рассмотрении всех элементов высокого порядка. Во-вторых, результат вычисления поверхностного интеграла

$$\int_{S_1} h T_\infty [N]^T dS = \frac{PLhT_\infty}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

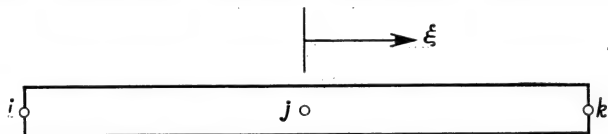
перестает быть интуитивно очевидным. Как мы видели, в аналогичной ситуации в случае линейного элемента конвективные потери тепла делились поровну между его узлами. Этот результат выглядит интуитивно верным, так как элемент имел два узла. Казалось бы, что в случае элемента с тремя узлами следует ожидать распределения по узлам в отношении  $1/4, 1/2, 1/4$ , но вместо этого получаем распределение в отношении  $1/6, 2/3, 1/6$ .

Не пытайтесь предугадать результаты интегрирования, когда имеете дело с элементами высокого порядка. Они не будут совпадать с вашей физической интуицией. Все сказанное относится также к двумерным и трехмерным элементам.

### 13.3. Естественная система координат.

#### Преобразования координат. Матрица Якоби

Естественная система координат обладает определенным преимуществом при рассмотрении двумерных и трехмерных элементов, так как она позволяет деформировать границы этих элементов. Безразмерная система координат может быть также введена и для одномерных элементов. Однако упомянутое преимущество здесь



Фиг. 13.4. Естественная система координат для одномерного квадратичного элемента.

носит главным образом академический характер. Оно упрощает иллюстрацию самого понятия локальных координат и некоторых вычислительных операций. В этом разделе будет рассмотрена естественная система координат для одномерного элемента как необходимое введение к обсуждению двумерных и трехмерных элементов, которому посвящены следующие главы.

Естественной системой координат для одномерного элемента служит относительная длина, определяемая как

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad (13.26)$$

где  $\xi$  — координата. Начало отсчета  $\xi$  выбрано в средней точке элемента, как показано на фиг. 13.4. Функции формы  $N$  могут быть определены с помощью формулы (13.14), если только  $f$  выражены теперь через  $\xi$  вместо  $x$ . Функции формы для линейного, кубического и квадратичного элементов приведены на фиг. 13.5. Читатель сам может убедиться в их правильности.

В этом разделе будет проиллюстрировано вычисление матрицы элемента. Если вернуться к гл. 5, то мы увидим, что каждое из приведенных там соотношений, определяющих матрицы элементов, содержит производные от функций формы по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В случае одномерной задачи теории поля, например, выражение для коэффициентов матрицы теплопроводности содержит производную  $dN_\beta/dx$ :

$$[k_{\beta\gamma}^{(e)}] = \int_V K_{xx} \frac{dN_\beta}{dx} \frac{dN_\gamma}{dx} dV, \quad \beta = i, j, k, \quad \gamma = i, j, k. \quad (13.27)$$

Для дальнейших выкладок нам потребуются формулы преобразования координат вида

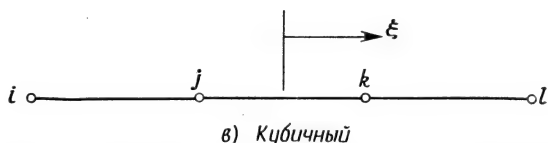
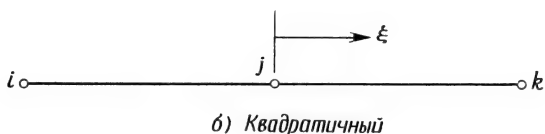
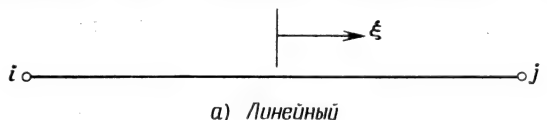
$$x = f(\xi) \quad (13.28a)$$

или

$$\xi = g(x). \quad (13.286)$$

Функции  $f(\xi)$  и  $g(x)$  предполагаются взаимнооднозначными.

Соотношение преобразования координат (13.28) может быть записано с помощью функций формы, приведенных на фиг. 13.5. Проиллюстрируем это на примере квадратичного элемента. Интер-



Фиг. 13.5. Естественные функции формы для одномерных элементов.

$$а) N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi), \quad N_j = \frac{1}{2} (1 + \xi);$$

$$б) N_i = -\frac{3}{2} (1 - \xi), \quad N_j = (1 + \xi) (1 - \xi), \quad N_k = \frac{3}{2} (1 + \xi);$$

$$в) N_i = -\frac{9}{16} \left( \xi - 1 \right) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right), \quad N_j = \frac{27}{16} \left( \xi + 1 \right) \left( \xi - 1 \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right),$$

$$N_k = -\frac{27}{16} \left( \xi + 1 \right) \left( \xi - 1 \right) \left( \xi + \frac{1}{3} \right), \quad N_l = \frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) \left( \xi + 1 \right).$$

поляционное соотношение для скалярной величины, скажем для температуры, имеет вид

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k, \quad (13.29)$$

где

$$N_i = -\frac{\xi}{2} (1 - \xi),$$

$$N_j = (1 + \xi) (1 - \xi).$$

$$N_k = \frac{\xi}{2} (1 + \xi).$$

Формулу преобразования координат можно записать, используя такую же комбинацию функций формы, но только в качестве узловых параметров нужно взять координаты узлов:

$$x = N_i X_i + N_j X_j + N_k X_k, \quad (13.30)$$

где  $N_\beta$  — те же функции формы, что и в формуле (13.29).

Вычисление  $dN_\beta/dx$  теперь не представляет труда, если вспомнить, что

$$\frac{dN_\beta}{d\xi} = \frac{dN_\beta}{dx} \frac{dx}{d\xi}. \quad (13.31)$$

Обращая последнее равенство, имеем

$$\frac{dN_\beta}{dx} = \frac{1}{dx/d\xi} \frac{dN_\beta}{d\xi}. \quad (13.32)$$

Величина  $dx/d\xi$  называется матрицей Якоби преобразования координат [2]; далее она будет обозначаться через  $[J]$ . Для одномерного случая  $[J]$  есть матрица размером  $1 \times 1$ , которая вычисляется по формуле

$$[J] = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} X_i + \frac{dN_j}{d\xi} X_j + \dots + \frac{dN_r}{d\xi} X_r. \quad (13.33)$$

Применение формул (13.32) и (13.33) лучше всего проиллюстрировать на конкретном примере.

### Пример

128. Требуется выразить производные  $dN_i/dx$ ,  $dN_j/dx$ ,  $dN_k/dx$  в местной системе координат в случае одномерного квадратичного элемента, который имеет следующие узловые координаты:

$$X_i = \frac{1}{2}, \quad X_j = 1 \quad \text{и} \quad X_k = \frac{3}{2}.$$

В соответствии с формулой (13.32)

$$\frac{dN_\beta}{dx} = [J]^{-1} \frac{dN_\beta}{d\xi}, \quad \beta = i, j, k.$$

Прежде всего составим матрицы  $[J]$  и  $[J]^{-1}$ . Используя формулу (13.33), получаем

$$[J] = \frac{dN_i}{d\xi} X_i + \frac{dN_j}{d\xi} X_j + \frac{dN_k}{d\xi} X_k.$$

Запишем производные функций формы по  $\xi$ :

$$\begin{aligned}\frac{dN_i}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[ -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \right] = -\frac{1}{2} + \xi, \\ \frac{dN_j}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} [(1-\xi)(1+\xi)] = -2\xi, \\ \frac{dN_k}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{\xi(1+\xi)}{2} \right] = \frac{1}{2} + \xi.\end{aligned}$$

Подставив эти выражения вместе с числовыми значениями координат в выражение для  $[J]$ , получим

$$\begin{aligned}[J] &= \left( -\frac{1}{2} + \xi \right) \left( \frac{1}{2} \right) + (-2\xi)(1) + \left( \frac{1}{2} + \xi \right) \left( \frac{3}{2} \right), \\ [J] &= -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{2} - 2\xi + \frac{3}{4} + \frac{3\xi}{2} = \frac{1}{2}, \quad [J]^{-1} = 2.\end{aligned}$$

Так как  $dN_\beta/d\xi$  уже определено, можно получить  $dN_\beta/dx$ . Из формулы (13.32) находим

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_j}{dx} \\ \frac{dN_k}{dx} \end{Bmatrix} = [2] \begin{Bmatrix} \left( -\frac{1}{2} + \xi \right) \\ (-2\xi) \\ \left( \frac{1}{2} + \xi \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 + 2\xi \\ -4\xi \\ 1 + 2\xi \end{Bmatrix}, \quad (13.34)$$

поскольку  $[J]^{-1} = 2$ .

Заметим, что записанные производные являются функциями естественной координаты  $\xi$ . Это означает, что, прежде чем вычислять  $[k^{(e)}]$ , нужно сделать замену переменной интегрирования в интеграле (13.27). Для малого элемента объема имеем

$$dV = dx dy dz = |\det [J]| d\xi d\eta d\zeta. \quad (13.35)$$

В рассматриваемом случае имеется только одна координата  $\xi$ , поэтому

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = A \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det [J]| d\xi, \quad (13.36)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения и  $|\det [J]| = 1/2$ .

Подставив в (13.36) полученные выше выражения, будем иметь

$$[k^{(e)}] = AK_{xx} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1+2\xi \\ -4\xi \\ 1+2\xi \end{bmatrix} [(-1+2\xi) \quad (-4\xi) \quad (1+2\xi)] \frac{1}{2} d\xi,$$

или

$$[k^{(e)}] = \frac{AK_{xx}}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (-1+2\xi)^2 & (-4\xi)(-1+2\xi) & (1+2\xi)(-1+2\xi) \\ (-4\xi)(-1+2\xi) & 16\xi^2 & (-4\xi)(1+2\xi) \\ (1+2\xi)(-1+2\xi) & (-4\xi)(1+2\xi) & (1+2\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi.$$

После интегрирования находим

$$[k^{(e)}] = \frac{AK_{xx}}{6} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}.$$

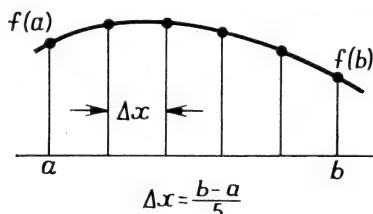
Этот результат идентичен результату, полученному при использовании формулы (13.15), если величину  $L$  считать равной единице, как в данном случае. Факт совпадения результатов подтверждает правильность рассмотренной методики. Однако ощутимое преимущество использования естественной системы координат заключается в возможности изменения формы элемента, что иллюстрируется в следующей главе.

### 13.4. Применение численного интегрирования при определении матриц элемента

В предыдущем разделе удалось продемонстрировать стандартную методику определения матриц элементов в общих чертах на примере с использованием естественной системы координат потому, что все интегралы были вычислены почти без труда. Но это скорее исключение, чем правило. Обычно матрица Якоби  $[J]$  является функцией  $\xi$  и не может быть легко вычислена, так как ее коэффициенты — полиномы. В таких случаях  $[J]^{-1}$  никогда не определяется явным образом и для составления матриц элементов используются методы численного интегрирования.

При рассмотрении одномерного элемента в предыдущем разделе в численном интегрировании не было необходимости. Однако этот элемент имеет одну очень важную характеристику, которая делает его удобным для иллюстрации методов численного интегрирования: ограниченное число точек интегрирования. Объем вычислений при этом сокращается настолько, что их можно полностью провести для некоторого иллюстративного примера.

Численно взять интегралы можно одним из двух основных способов. Согласно первому способу, значения подынтегральной функции вычисляются в точках, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Если имеется  $n$  таких точек, то можно построить интерполяционный многочлен порядка  $(n-1)$ , совпадающий в указанных точках с подынтегральной функцией (фиг. 13.6), после чего



Фиг. 13.6. Точки интегрирования квадратуры Ньютона—Котеса при  $n=6$ .

интегрирование выполняется точно. В результате применения такой процедуры получаются, например, формула трапеций при  $n=2$  и формула Симпсона при  $n=3$ . Такой способ численного интегрирования известен как квадратура Ньютона—Котеса. Значение интеграла получается суммированием значений подынтегральной функции в точках интегрирования, умноженных на весовые коэффициенты:

$$\int_a^b f(x) dx = L \sum_{s=1}^n H_s f(x_s), \quad (13.37)$$

где  $L=b-a$ . В табл. 13.1 даны величины весовых коэффициентов  $H_s$  для квадратур до четвертого порядка.

Согласно второму способу численного интегрирования, точки разбиения области интегрирования не фиксируются заранее, а

Таблица 13.1

Весовые коэффициенты квадратурной формулы Ньютона — Котеса до четвертого порядка

$n$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$
2	$1/2$	$1/2$			
3	$1/6$	$2/3$	$1/6$		
4	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	
5	$7/90$	$32/90$	$12/90$	$32/90$	$7/90$

подбираются с целью достижения наибольшей точности вычислений. Это означает, что при выборе  $n$  точек рассматриваются  $2n$  неизвестных  $\bar{f}$  и  $x$ ; следовательно, порядок интерполяционного многочлена теперь равен  $(2n-1)$ . После построения интерполяционного многочлена интегрирование выполняется точно. При таком подходе, известном как квадратура Гаусса — Лежандра, должны быть решены дополнительно некоторые уравнения, после чего значения  $\bar{f}$  и  $x$  записываются в таблице. В табл. 13.2 представлены координаты

Таблица 13.2

Координаты узлов и весовые коэффициенты для квадратуры Гаусса—Лежандра до четвертого порядка

$n$	$\xi_i$	$H_i$	$n$	$\xi_i$	$H_i$
2	$\pm 0,577350$	1,00	4	$\pm 0,861136$	0,347855
3	0,0	8/9		$\pm 0,339981$	0,652145
	$\pm 0,774597$	5/9	5	0,0	0,568889
				$\pm 0,538469$	0,478629
				$\pm 0,906180$	0,236927

наты точек интегрирования и весовые коэффициенты  $H$  для квадратуры Гаусса — Лежандра до четвертого порядка [1]. Расположение точек разбиения, соответствующее интервалу интегрирования от  $-1$  до  $1$  для случаев  $n=2$  и  $n=3$ , показано графически на фиг. 13.7. При расчетах методом конечных элементов применяется квадратурная формула Гаусса — Лежандра, так как она требует меньшего числа точек интегрирования, чем это необходимо при использовании метода Ньютона — Котеса для достижения одинаковой степени точности. Ниже используется только способ Гаусса — Лежандра.

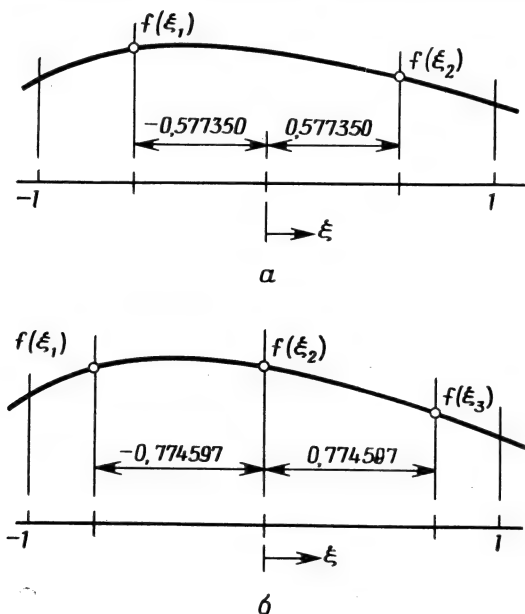
Теперь вернемся к нашей главной задаче — использованию методов численного интегрирования при составлении матриц элемента. В этом разделе будет продолжено рассмотрение квадратичного элемента. Матрицы элемента выражаются интегралами

$$[k^{(e)}] = K_{xx} A \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det [J]| d\xi + Ph \int_{-1}^1 [N]^T |\det [J]| d\xi, \quad (13.38)$$

$$\{f^{(e)}\} = Ph T_{\infty} \int_{-1}^1 [N]^T |\det [J]| d\xi, \quad (13.39)$$

где функции формы и преобразование координат те же, что даны в (13.29) и (13.30).

Порядок квадратурных формул, используемых для вычисления данных интегралов, зависит от порядка полиномов в произведениях  $[B]^T[D][B]$  и  $[N]^T[N]$ . Произведение  $[N]^T[N]$  содержит полином более высокого порядка, так как  $[B]$  связано с дифференцированием  $[N]$ . Поскольку  $N_\beta = f(\xi^2)$ , произведение  $N_\beta N_\gamma$  будет со-



Фиг. 13.7. Точки интегрирования квадратуры Гаусса—Лежандра.

$a$  — точки интегрирования для  $n=2$ ;  $b$  — точки интегрирования для  $n=3$ .

держат  $\xi$  в четвертой степени. Порядок квадратуры Гаусса—Лежандра  $n$  определяется из равенства

$$2n-1=4, \quad n=\frac{5}{2}.$$

Так как  $n$  должно быть целым, выбираем  $n=3$  для интегрирования произведения  $[N]^T[N]$ . Для интегрирования выражения  $[B]^T[D][B]$  достаточно квадратуры второго порядка  $n=2$ , поскольку это произведение содержит члены степени не выше, чем  $\xi^2$ . Для вычисления интеграла (13.39) также может быть использована квадратура второго порядка.

Последовательности арифметических операций при вычислении интегралов, содержащих  $[B]^T[D][B]$  и  $[N]^T[N]$ , почти идентичны, поэтому только один из них заслуживает детального рассмот-

рения. Рассмотрим интеграл от  $[N]^T[N]$ , так как для него весовые коэффициенты  $H_i$  не равны единице.

Используя данные табл. 13.2 при  $n=3$ , получаем

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^3 H_i f(\xi_i)$$

или

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = f(\xi_1) H_1 + f(\xi_2) H_2 + f(\xi_3) H_3, \quad (13.40)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0,774597, & H_1 &= 5/9, \\ \xi_2 &= 0,0, & H_2 &= 8/9, \\ \xi_3 &= 0,774597, & H_3 &= 5/9. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция  $f(\xi)$  в данном случае имеет вид

$$f(\xi) = [N]^T [N] |\det [J]|. \quad (13.41)$$

Применим тот же элемент, который был рассмотрен в примере 128, что позволит воспользоваться результатами предыдущих расчетов. Мы уже знаем, что  $[J] = 1/2$ ,  $[J]^{-1} = 2$ . Абсолютное значение определителя  $[J]$  равно  $1/2$ , и функция  $f(\xi) = 1/2 [N]^T [N]$ , поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} ([N(\xi_1)]^T [N(\xi_1)] H_1 + \\ &+ [N(\xi_2)]^T [N(\xi_2)] H_2 + [N(\xi_3)]^T [N(\xi_3)] H_3). \end{aligned}$$

Вычислим произведения вида  $[N(\xi)]^T [N(\xi)]$ . Начнем с точки  $\xi_1 = -0,774597$ .

$$N_i(\xi_1) = -\frac{\xi_1}{2} (1 - \xi_1) = \frac{+0,774597}{2} (1 + 0,774597) = 0,687299,$$

$$N_j(\xi_1) = (1 - \xi_1) (1 + \xi_1) = 0,400000,$$

$$N_k(\xi_1) = \frac{\xi_1}{2} (1 + \xi_1) = -0,087298,$$

$$f(\xi_1) = [N]^T [N] = \begin{bmatrix} 0,687299 \\ 0,400000 \\ -0,087298 \end{bmatrix} [0,687299 \quad 0,400000 \quad -0,087298]$$

или

$$f(\xi_1) = \begin{bmatrix} 0,472299 & 0,274896 & -0,059995 \\ & 0,160000 & -0,034919 \\ \text{Симметрично} & & 0,007621 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим  $\xi_2 = 0,0$ . Имеем

$$\begin{aligned} N_i(\xi_2) &= -\xi_2 \frac{1-\xi_2}{2} = 0, \\ N_j(\xi_2) &= (1-\xi_2)(1+\xi_2) = 1, \\ N_k(\xi_2) &= \frac{\xi_2(1+\xi_2)}{2} = 0 \end{aligned}$$

и

$$f(\xi_2) = [N(\xi_2)]^T [N(\xi_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последняя узловая точка  $\xi_3 = +0,774597$ . Ей соответствуют следующие значения функций формы:

$$\begin{aligned} N_i(\xi_3) &= -0,087298, \\ N_j(\xi_3) &= 0,400000, \\ N_k(\xi_3) &= 0,687299, \end{aligned}$$

$$f(\xi_3) = \begin{bmatrix} 0,007621 & -0,034919 & -0,059995 \\ & 0,160000 & 0,274896 \\ \text{Симметрично} & & 0,472299 \end{bmatrix}.$$

Так как  $H_1 = H_3$ , то

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [N]^T [N] |\det [J]| d\xi &= \frac{1}{2} \{ H_1 [f(\xi_1) + f(\xi_3)] + \\ &+ H_2 f(\xi_2) \} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Подстановка матриц для  $f(\xi_1)$ ,  $f(\xi_2)$  и  $f(\xi_3)$  в приведенное выше соотношение дает

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 0,48 & 0,24 & -0,12 \\ 0,24 & 0,32 & 0,24 \\ -0,12 & 0,24 & 0,48 \end{bmatrix} + \frac{8}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Отсюда получаем

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \begin{bmatrix} 0,1333 & 0,0667 & -0,0333 \\ 0,0667 & 0,5333 & 0,0667 \\ -0,0333 & 0,0667 & 0,1333 \end{bmatrix}.$$

В разд. 13.2 были получены точные значения для рассматриваемого интеграла с помощью соотношения (13.16). Только что вычисленные значения хорошо согласуются с точными значениями при  $L=1$  и  $hP=1$ .

В табл. 13.3 приведен порядок квадратуры, необходимый для получения точного результата для одномерных элементов, представленных на фиг. 13.5.

Таблица 13.3

Порядок квадратуры Гаусса—Лежандра  
для одномерных элементов

Элемент	$[N]^T[N]$	$[B]^T[B]^1)$	$[N]^T$
Линейный	2		2
Квадратичный	3	2	2
Кубичный	4	3	2

<sup>1)</sup> В случае линейного элемента нет необходимости интегрировать  $[B]^T[B]$ , так как это произведение содержит только константы.

### 13.5. Субпараметрические, изопараметрические и суперпараметрические элементы

Функции формы, которые связывают координаты  $x$  и  $\xi$  в (13.30), идентичны функциям, описывающим распределение температуры внутри элемента [формула (13.29)]. Когда такое условие выполняется, элемент называют изопараметрическим. Совпадение функций формы соотношения преобразования координат и интерполяционного полинома далеко не всегда имеет место. В действительности изопараметрический элемент является скорее исключением, чем правилом.

Для упрощения ввода данных в ЭВМ и повышения эффективности вычислений следует использовать в соотношениях преобразования координат возможно более простые функции формы. Если элемент ограничен прямолинейными сторонами, то для описания преобразований координат достаточно линейных функций формы. Матрица Якоби  $[J]$  и  $|\det[J]|$  при рассмотрении элемента с прямыми сторонами будут теми же самыми независимо от

того, какие функции формы — линейные, квадратичные или кубические — используются в формулах преобразований координат. Чтобы показать это, опять коротко рассмотрим пример 128. Так как элемент изображается прямолинейным отрезком, в качестве формулы преобразования координат могло бы быть использовано такое соотношение

$$x = N_i X_i + N_k X_k. \quad (13.42)$$

Применяя линейные функции формы, получим

$$x = \frac{1}{2} (1 - \xi) X_i + \frac{1}{2} (1 + \xi) X_k,$$

где  $X_i = 1/2$  и  $X_k = 3/2$ . Матрица Якоби имеет вид

$$[J] = \frac{dN_i}{d\xi} X_i + \frac{dN_k}{d\xi} X_k = -\frac{1}{2} X_i + \frac{1}{2} X_k = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4},$$

$$[J] = \frac{1}{2}.$$

Этот результат идентичен тому, что был получен в иллюстративном примере с использованием квадратичных функций формы. Формула преобразования координат может быть представлена с помощью четырех узлов кубического элемента, но матрица Якоби при этом не изменится.

Тот факт, что функция, описывающая преобразование координат, не должна совпадать по порядку с интерполяционной функцией, открывает новые чрезвычайно благоприятные перспективы. Можно описывать геометрию элемента независимо от аппроксимации неизвестной величины. Это позволяет сочетать как интерполяционные полиномы высокого порядка с элементами простой геометрии, так и элементы сложной формы с простыми интерполяционными полиномами. В следующих двух главах будет рассмотрено применение элементов такого типа.

Два независимых множества узлов теперь могут быть заданы в некоторой области. Одно множество узлов определяет преобразование координат (форму элемента), а второе — интерполяционный полином. Что касается соотношения между числами узлов в этих двух множествах, то тут имеются три следующих варианта:

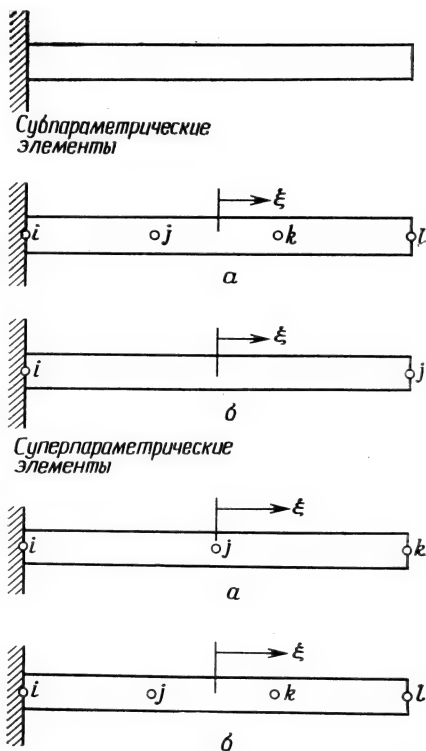
1. Число узлов, используемых для определения формы элемента, меньше числа узлов, используемых при определении интерполяционной функции температуры, и т. д.
2. Число узлов, определяющих форму элемента, равно числу узлов, определяющих интерполяционную функцию.
3. Число узлов, используемых для задания формы элемента,

больше числа узлов, используемых для определения интерполяционной функции.

В соответствии с этими тремя вариантами элементы называют субпараметрическими, изопараметрическими и суперпараметрическими. Субпараметрические элементы преобладают там, где используются комплекс-элементы, потому что они применяются, когда нет необходимости в искажении формы элемента. Примеры субпараметрических и суперпараметрических элементов показаны на фиг. 13.8 применительно к задаче о стержне из второго раздела этой главы. Суперпараметрический элемент на фиг. 13.8 приведен только для иллюстрации, а не в связи с решением задачи. Суперпараметрический элемент, однако, применяется в двумерных и трехмерных задачах.

Достигаемое за счет использования естественной системы координат увеличение гибкости элемента не лишено недостатков. Матрицы элементов должны теперь определяться с помощью численных методов интегрирования. Еще один недостаток связан с обозначениями, и его надо устранить прежде всего. Дело в том, что далее становится неудобным использовать для обозначений узлов элемента индексы  $i, j, k, l$ . В самом деле, некоторые элементы могут иметь в общей сложности до 30 узлов. К тому же при таких обозначениях нельзя отличить узлы, которые используются для определения формы элемента, от узлов, которые определяют интерполяционный полином.

Таким образом, приходится отказаться от обозначения узлов элемента буквенными индексами  $i, j, k, l, \dots, r$ ; далее для этой цели будут использоваться числовые значения. Интерполяционная функ-



Фиг. 13.8. Субпараметрические и суперпараметрические одномерные элементы. Субпараметрические: а — кубический элемент для аппроксимации распределения температуры; б — линейный элемент для определения формы. Суперпараметрические: а — квадратичный элемент для аппроксимации распределения температуры; б — кубический элемент для определения формы.

ция элемента для скалярной величины в общем виде записывается теперь следующим образом:

$$\varphi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + \dots + N_r \Phi_r = \sum_{\beta=1}^r N_{\beta} \Phi_{\beta}. \quad (13.43)$$

Номера узлов 1, 2, ...,  $r$  одномерного элемента располагаются последовательно от левого конца элемента к правому. В случае двумерных элементов нумерация начинается в произвольной точке и соответствует обходу элемента в направлении против движения часовой стрелки.



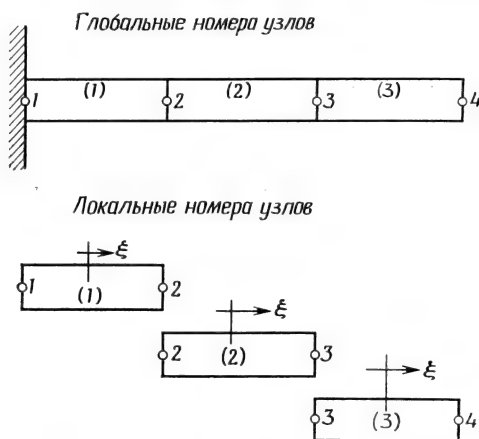
Фиг. 13.9. Локальные и глобальные номера узлов, используемые для интерполяционного полинома.

Элемент	Локальные степени свободы	Глобальные степени свободы
(1)	1 2 3 4	1 2 3 4
(2)	1 2 3 4	4 5 6 7
(3)	1 2 3 4	7 8 9 10

Включение элемента высокого порядка в область иллюстрируется на фиг. 13.9. Приведенная таблица устанавливает соответствие степеней свободы элемента в локальной системе координат с глобальными степенями свободы. Соответственно меняется и нижний индекс величин. Интерполяционные функции для задачи о стержне, изображенном на фиг. 13.9, запишутся теперь в виде

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4, \\ \varphi^{(2)} &= N_1^{(2)}\Phi_4 + N_2^{(2)}\Phi_5 + N_3^{(2)}\Phi_6 + N_4^{(2)}\Phi_7, \\ \varphi^{(3)} &= N_1^{(3)}\Phi_7 + N_2^{(3)}\Phi_8 + N_3^{(3)}\Phi_9 + N_4^{(3)}\Phi_{10}.\end{aligned}\quad (13.44)$$

Нижние индексы функций формы не изменяются потому, что они не содержат никаких величин, связанных с глобальной системой координат.



Фиг. 13.10. Локальные и глобальные номера узлов, используемые в соотношениях преобразований координат.

Элемент	Локальные узлы	Глобальные узлы
(1)	1 2	1 2
(2)	1 2	2 3
(3)	1 2	3 4

Общее соотношение для отдельного элемента, определяющее преобразование координат, имеет вид

$$x = R_1 X_1 + R_2 X_2 + \dots + R_r X_r, \quad (13.45)$$

где  $R_p$  — выбранные функции формы. Символ  $R$  будет использоваться для обозначения функций формы в соотношениях преобразования координат с тем, чтобы избежать путаницы с функциями формы, которые применяются в интерполяционных уравнениях.

Система уравнений, аналогичная (13.44), может быть записана и для преобразований координат, если только определены глобальные координаты узлов элементов. Координаты узлов для стержня, изображенного на фиг. 13.9, приведены на фиг. 13.10 вместе с соотношениями включения элементов. Окончательные формулы преобразований координат имеют вид

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= R_1^{(1)} X_1 + R_2^{(1)} X_2, \\ x^{(2)} &= R_1^{(2)} X_2 + R_2^{(2)} X_3, \\ x^{(3)} &= R_1^{(3)} X_3 + R_2^{(3)} X_4. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Обсуждаемые в этом разделе положения являются исходными для понимания комплекс-элементов, рассматриваемых в следующих двух главах. *Главное помнить, что всегда существуют два множества глобальных узлов. Одно определяет глобальные степени свободы, связанные с интерполяционной функцией, а другое — форму элементов.* Только в случае изопараметрического элемента оба эти множества совпадают.

## Задачи

129. Получите выражение для функции формы кубического элемента и проверьте соотношение для  $N_j$ , данное на фиг. 13.3.

130. Определите функции формы для квадратичного элемента, когда узел  $j$  расположен от узла  $i$  на расстоянии, равном  $L/3$ . Удовлетворяют ли эти функции формы критериям сходимости?

131. Решите задачу о переносе тепла в стержне (пример 127), используя один кубичный элемент. Сравните найденные значения температуры с аналитическим решением (приведенным в примере 127) и оцените точность такой одноэлементной модели.

132. Проверьте функции формы квадратичного элемента, данные на фиг. 13.5.

133. Вычислите  $dN_i/dx$  при  $x=80$  см для квадратичного элемента, который имеет узловые координаты  $X_i=0,25$  см,  $X_j=0,75$  см и  $X_k=1,25$  см. Вычислите  $dN_i/dx$  с помощью естественной системы координат и сравните результат со значением, полученным с помощью функции формы, данной на фиг. 13.3.

134. Вычислите  $dN_j/dx$  в точке  $x=0,3$  см для квадратичного элемента с узловыми координатами  $X_i=0$  см,  $X_j=0,25$  см и  $X_k=0,5$  см с помощью естественной системы координат и сравните результат со значением, которое получается при использовании функций формы, данных на фиг. 13.3.

135. Вычислите поверхностный интеграл  $\int_S [N]^T dS$  для кубического элемента.

136. Вычислите поверхностный интеграл  $\int_S h T_\infty [N]^T dS$  для одномерного элемента, учитывая линейное изменение коэффициента теплообмена  $h$  от нуля в узле  $i$  до  $h_0$  в узле  $k$ . Периметр  $P$  считать постоянным по длине.

137. Вычислите  $[k^{(e)}]$  в случае, когда для определения температуры используется линейный интерполяционный полином, а для задания площади поперечного сечения применяется квадратичная интерполяция.

138. Проинтегрируйте численно функцию  $f(\xi)=1+2\xi+\xi^2$  на отрезке от  $-1$  до  $1$ . Сравните результат со значением, полученным аналитически.

139. Проинтегрируйте численно функцию  $f(\xi)=2\xi^2+\xi^4$  на отрезке от  $-1$  до  $1$ . Сравните результат со значением, полученным аналитически.

140. Измените программу TDHEAT так, чтобы она использовала квадратичный элемент для решения одномерных задач о стержне.

141. Напишите подпрограмму, которая вычисляет  $dN_\beta/dx$  в заданной точке (координата точки вводится) для линейного, квадратичного или кубического элементов. Функции формы должны быть выражены в естественной системе координат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Conte S. D., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, N. Y., 1965.
2. Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 3-rd ed., Wiley, N. Y., 1972.
3. Williams P. W., Numerical Computation, Nelson, Don Mill, Can., 1972.

## Глава 14

### ТРЕУГОЛЬНЫЙ И ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Треугольные и тетраэдральные элементы нам уже знакомы. Простейшие из этих элементов широко использовались в первой половине книги. Теперь опять рассмотрим эти элементы в свете той информации, которая дана в гл. 13, и особое внимание уделим квадратичным и кубичным интерполяционным полиномам.

Естественные системы координат для треугольного и тетраэдрального элементов определены в гл. 3 и использовались в главах прикладного характера. Каждая координатная компонента для треугольного элемента представляет собой отношение расстояния от выбранной точки до одной из сторон треугольника к высоте, опущенной на ту же сторону. Координаты треугольника обозначались через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . Эти три величины не являются независимыми, они связаны между собой соотношением

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (14.1)$$

Интегральные формулы, использующие эти координаты, были введены в гл. 3 и нашли широкое применение в главах прикладного характера.

Каждому типу треугольных элементов соответствует интерполяционный полином определенного порядка. Квадратичный треугольный элемент, например, содержит шесть узлов (фиг. 14.1, б); интерполяционный полином для него имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (14.2)$$

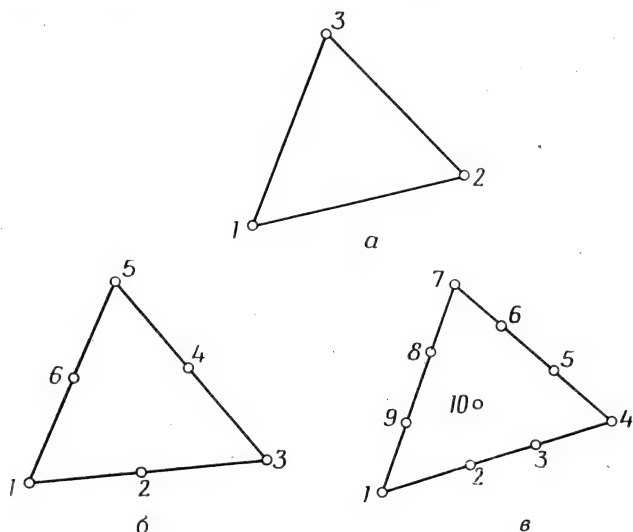
Интерполяционный полином для кубичного элемента представляется суммой членов, содержащихся в формуле (14.2), и всех кубичных членов:

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Кубичные треугольники (фиг. 14.1, в) отличаются от всех ранее рассмотренных элементов тем, что имеют внутренний узел. Все элементы более высокого порядка, чем квадратичные, имеют внутренние узлы, т. е. узлы, расположенные внутри элемента.

Величины  $\alpha_i$  в формулах (14.2) и (14.3) могут быть определены методами, изложенными в гл. 3. Алгебраические операции при

этом, однако, становятся более сложными, так как число узлов возрастает. Более предпочтительным оказывается непосредственное получение функций формы. Использование естественной системы координат значительно упрощает эту операцию в случае тре-



Фиг. 14.1. Линейный (а), квадратичный (б), кубический (в) треугольные элементы.

угольного элемента. Мы начнем обсуждение треугольных элементов высокого порядка с рассмотрения непосредственного получения функций формы.

### 14.1. Функции формы для элементов высокого порядка

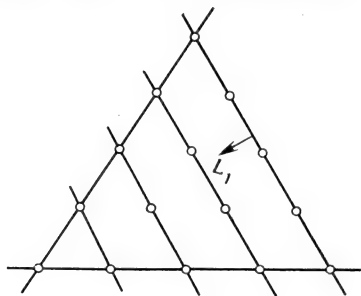
Определение функций формы для треугольных элементов высокого порядка упрощается тем, что имеется возможность проводить линии, перпендикулярные  $L$ -координатам, каждая из которых пересекает ряд узлов (фиг. 14.2). Эта особенность сохраняется независимо от числа узлов, которые содержит треугольник.

Общая формула для вычисления функции формы имеет вид

$$N_{\beta} = \prod_{\delta=1}^n \frac{F_{\delta}}{F_{\delta | L_1, L_2, L_3}}, \quad (14.4)$$

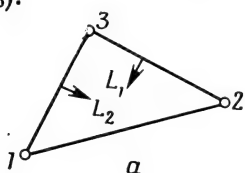
где  $n$  — порядок треугольника, а  $F_{\delta}$  — функции от  $L_1, L_2$  и  $L_3$ . Порядок треугольника  $n$  определяется как величина, на единицу меньшая числа узлов на стороне треугольника. Квадратичный треугольник имеет три узла на стороне и поэтому является элементом второго порядка.

Функции  $F_\delta$  определяются из уравнений  $n$  линий, которые проходят через все узлы, за исключением узла, для которого определяется функция формы. Если рассматривается уравнение прямой



Фиг. 14.2. Перпендикулярные  $L_1$  линии, которые проходят через все узлы.

$L_1 = c$ , то  $F_\delta = L_1 - c$ . Знаменатель (14.4) есть значение  $F_\delta$ , определяемое с помощью координат узла  $\beta$  (узла, в котором вычисляется  $N_\beta$ ).



Фиг. 14.3. Функции формы для линейного (а), квадратичного (б) и кубического (в) треугольных элементов.

а)  $N_1 = L_1$ ,  $N_2 = L_2$ ,  $N_3 = L_3$ ;

б)  $N_1 = L_1(2L_1 - 1)$ ,  $N_2 = 4L_1L_2$ ,

$N_3 = L_2(2L_2 - 1)$ ,  $N_4 = 4L_2L_3$ ,

$N_5 = L_3(2L_3 - 1)$ ,  $N_6 = 4L_1L_3$ ;

в)  $N_1 = \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$ ,

$N_2 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1 - 1)$ ,

$N_3 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_2 - 1)$ ,

$N_4 = \frac{1}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$ ,

$N_5 = \frac{9}{2} L_2L_3(3L_2 - 1)$ ,

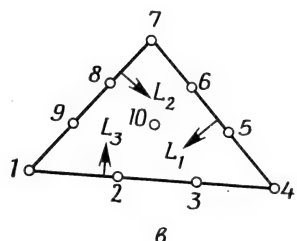
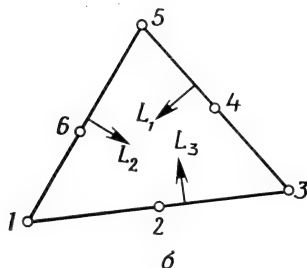
$N_6 = \frac{9}{2} L_2L_3(3L_3 - 1)$ ,

$N_7 = \frac{1}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$ ,

$N_8 = \frac{9}{2} L_3L_1(3L_3 - 1)$ ,

$N_9 = \frac{9}{2} L_1L_3(3L_1 - 1)$ ,

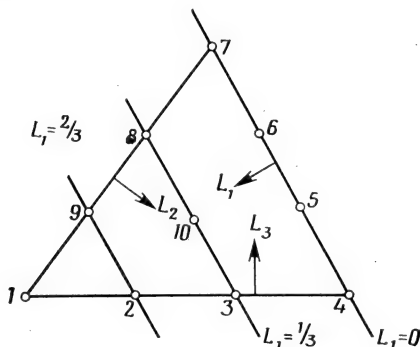
$N_{10} = 27L_1L_2L_3$ .



Функции формы для линейного, квадратичного и кубического треугольных элементов приведены на фиг. 14.3. Определение этих функций иллюстрируется на следующих примерах.

### Пример

142. Требуется определить функцию формы  $N_1$  для кубического треугольного элемента.



К задаче 142.

Кубический треугольный элемент имеет четыре узла на стороне. Следовательно, это элемент третьего порядка,  $n=4-1=3$ . Нужно найти три линии, которые проходят через все узлы, за исключением первого узла. Это сделать очень легко, и необходимые линии показаны на фигуре. Уравнения этих линий:  $L_1=0$ ,  $L_1=1/3$  и  $L_1=2/3$ . Функции  $F$  имеют вид

$$F_1 = L_1 - 0 = L_1,$$

$$F_2 = L_1 - \frac{1}{3} = \frac{3L_1 - 1}{3},$$

$$F_3 = L_1 - \frac{2}{3} = \frac{3L_1 - 2}{3}.$$

Вычислим значения функций  $F_i$  в первом узле ( $L_1=1$ ,  $L_2=L_3=0$ ):

$$F_1|_{1, 0, 0} = 1,$$

$$F_2|_{1, 0, 0} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$F_3|_{1, 0, 0} = \frac{1}{3}.$$

Подставляя найденные величины в формулу (14.4), получаем

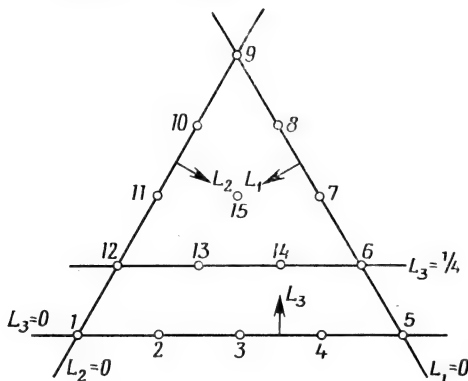
$$N_1 = \prod_{\delta=1}^3 \frac{F_{\delta}}{F_{\delta|1, 0, 0}} = \left(\frac{L_1}{1}\right) \left(\frac{3L_1-1}{3}\right) \frac{3}{2} \left(\frac{3L_1-2}{3}\right) \frac{3}{1},$$

или

$$N_1 = \frac{L_1}{2} (3L_1-1) (3L_1-2).$$

### Пример

143. Требуется определить функцию формы  $N_{15}$  для треугольного элемента четвертого порядка.



К задаче 143.

Так как порядок элемента равен четырем, нужно найти четыре линии, которые проходят через все узлы, за исключением узла 15. Три из них соответствуют сторонам треугольника  $L_1=0$ ,  $L_2=0$  и  $L_3=0$ . Четвертая линия проходит через узлы 12, 13, 14 и 6. Уравнение этой линии  $L_3=1/4$ ; функции  $F_{\delta}$  имеют вид

$$F_1 = L_1,$$

$$F_2 = L_2,$$

$$F_3 = L_3,$$

$$F_4 = \frac{4L_3-1}{4}.$$

После подстановки этих выражений в формулу (14.4) и учета координат 15-го узла  $(1/4, 1/4, 1/2)$  имеем

$$N_{15} = \prod_{\delta=1}^4 \frac{F_{\delta}}{F_{\delta|1/4, 1/4, 1/2}} = \frac{L_1}{(1/4)} \frac{L_2}{(1/4)} \frac{L_3}{(1/2)} \frac{4L_3-1}{4/(1/4)},$$

или

$$N_{15} = 32L_1L_2L_3(4L_3 - 1).$$

## 14.2. Вычисление производных функций формы

Для вычисления частных производных  $dN_\beta/dx$  и  $dN_\beta/dy$  можно воспользоваться процедурой, описанной в гл. 13. Некоторые изменения все же необходимо внести, поскольку мы теперь имеем дело с двумерной задачей и пользуемся координатами, которые не являются независимыми.

В качестве независимых координат выберем координаты  $L_1$  и  $L_2$ . Дифференцируя соотношение (13.32), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_1}, \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_2}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Матрица Якоби имеет вид

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

Поэтому

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (14.7)$$

Таким образом, для производных получаем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \end{Bmatrix}. \quad (14.8)$$

Чтобы учесть зависимую координату  $L_3$ , можно поступить двояко: либо переписать все функции формы, выразив их через  $L_1$  и  $L_2$ , либо заметить, что

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} + \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_1}. \quad (14.9)$$

Производная  $\partial L_1 / \partial L_1$  равна единице, а  $\partial L_2 / \partial L_1$  равна нулю, так как  $L_1$  и  $L_2$  независимы. Третье слагаемое может быть вычислено с помощью соотношения

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2. \quad (14.10)$$

Дифференцируя его, имеем

$$\frac{\partial L_3}{\partial L_1} = -1.$$

Теперь формула (14.9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3}. \quad (14.11a)$$

Аналогичное выражение получаем для  $\partial N_\beta / \partial L_2$ :

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3}. \quad (14.116)$$

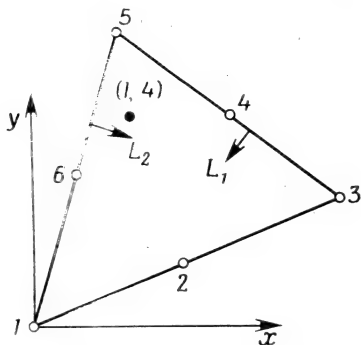
Принятые в формулах (14.11a) и (14.116) обозначения могут сначала вызвать недоумение, потому что члены  $\partial N_\beta / \partial L_1$  и  $\partial N_\beta / \partial L_2$  находятся в обеих частях равенства. Частная производная от  $N_\beta$  в левой части равенств вычисляется, когда  $N_\beta$  выражена как функция независимых координат  $L_1$  и  $L_2$ . В правой части функция  $N$  считается выраженной через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ .

Соотношения преобразований координат, определяющие форму элемента, обычно записываются с использованием трех координат. Следовательно, при вычислении матрицы Якоби должны применяться формулы (14.11a) и (14.116).

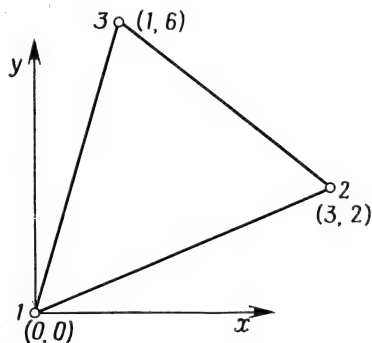
Применение сформулированных выше положений иллюстрируется на следующем примере.

### Пример

**144.** Требуется вычислить  $\partial N_4 / \partial x$  в точке (1, 4) для квадратичного треугольного элемента, показанного ниже.



К задаче 144. Узлы, используемые для определения интерполяционного полинома.



К задаче 144. Узлы, используемые для задания формы элемента.

Форма элемента может быть задана с помощью линейных функций формы  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  и координат узловых точек, расположенных в вершинах треугольника. Запишем формулы преобразований координат

$$x = L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3,$$

$$y = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3.$$

После подстановки узловых координат имеем

$$x = 3L_2 + L_3,$$

$$y = 2L_2 + 6L_3.$$

Вычислим производные, входящие в матрицу Якоби:

$$\frac{\partial x}{\partial L_1} = \frac{\partial x}{\partial L_1} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = -1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial L_2} = \frac{\partial x}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = 3 - 1 = 2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_1} = \frac{\partial y}{\partial L_1} - \frac{\partial y}{\partial L_3} = -6,$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_2} = 2 - 6 = -4.$$

Матрица Якоби и обратная к ней матрица имеют вид

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Функция формы  $N_4$  есть  $4L_2L_3$ . Дифференцируя ее по  $L_1$  и  $L_2$ , получаем

$$\frac{\partial N_4}{\partial L_1} = \frac{\partial N_4}{\partial L_1} - \frac{\partial N_4}{\partial L_3} = -4L_2,$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial L_2} = \frac{\partial N_4}{\partial L_2} - \frac{\partial N_4}{\partial L_3} = 4L_3 - 4L_2.$$

Подстановка этих частных производных вместе с  $[J]^{-1}$  в формулу (14.8) дает

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4L_2 \\ 4(L_3 - L_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} -8L_2 + 24L_3 \\ 12L_2 - 4L_3 \end{Bmatrix}.$$

или

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = -0,5L_2 + 1,5L_3,$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = 0,75L_2 - 0,25L_3.$$

Эти два соотношения выполняются в произвольной точке элемента. Наша цель — определить производные в точке (1, 4). Для достижения этой цели следует определить  $L$ -координаты данной точки. Используя преобразования координат, можно записать

$$1 = 0L_1 + 3L_2 + L_3,$$

$$4 = 0L_1 + 2L_2 + 6L_3,$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3.$$

Решением этой системы являются числа

$$L_1 = \frac{1}{4},$$

$$L_2 = \frac{1}{8},$$

$$L_3 = \frac{5}{8}.$$

Подставляя значения  $L_2$  и  $L_3$  в формулы для производных, получаем

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = -0,5L_2 + 1,5L_3 = -\frac{0,5}{8} + \frac{1,5 \cdot 5}{8} = \frac{7}{8},$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{1}{16}.$$

### 14.3. Составление матриц элементов

Если интерполяционные соотношения содержат  $L$ -координаты, в уравнениях для элементов появляются интегралы по площади элемента следующего вида:

$$Z = \int_0^1 \int_0^{1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) |\det [J]| dL_1 dL_2, \quad (14.12)$$

Эти интегралы должны быть определены численно, поскольку матрица Якоби является функцией  $L$ -координат и невозможно получить явное выражение для обратной матрицы. Некоторые интег-

ралы могли бы быть определены с помощью формул, представленных в третьей главе. Однако использование этих формул усложняется тем, что, прежде чем приступить к почленному интегрированию, требуется вычислить произведение матриц  $[B]^T[D][B]$ . Ошибок будет меньше, если эту операцию интегрирования выполнит ЭВМ.

Процедура численного интегрирования аналогична той, которая была рассмотрена применительно к одномерному элементу. В работе [1] предложено множество точек интегрирования для треугольника, позволяющее упростить численные расчеты. Расположение точек интегрирования и соответствующие весовые коэффициенты приведены в табл. 14.1. Использование данных табл. 14.1 эквивалентно замене интеграла (14.12) суммой:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) |\det[J]| dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^n W_i g(L_1, L_2, L_3), \quad (14.13)$$

где  $g(L_1, L_2, L_3)$  включает  $|\det[J]|$ . Порядок интерполирования определяется суммой показателей степеней трех координат в каждом члене. Например, если интегрируется произведение  $L_1 L_2 L_3^2$ , сумма показателей степеней которого равна четырем, следует использовать схему интегрирования четвертого порядка точности из табл. 14.1.

### Пример

145. Требуется определить интеграл от произведения с сомножителями  $\partial N_4/\partial x$  и  $\partial N_4/\partial y$  по площади элемента, рассмотренного в задаче 144. Проверить ответ, применив для вычислений интегральную форму (3.43).

Частные производные и матрица Якоби были определены в задаче 144. Они имеют вид

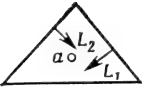
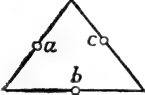
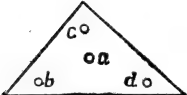
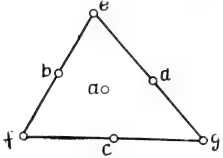

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \left( -\frac{1}{2} L_2 + \frac{3}{2} L_3 \right), \quad \frac{\partial N_4}{\partial y} = \left( \frac{3}{4} L_2 - \frac{1}{4} L_3 \right)$$

и  $|\det[J]| = 16$ . Запишем произведение

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{3}{8} L_2^2 + \frac{10}{8} L_2 L_3 - \frac{3}{8} L_3^2.$$

В этом выражении каждый член представляет собой произведение второго порядка, поэтому при интегрировании можно ограничить-

## Формулы численного интегрирования для треугольников

	Ошибка	Точки	Координаты			Весовые коэффициенты
	$R=O(h^2)$	$a$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$1/2$
	$R=O(h^2)$	$a$	$1/2$	0	$1/2$	$1/6$
		$b$	$1/2$	$1/2$	0	$1/6$
		$c$	0	$1/2$	$1/2$	$1/6$
	$R=O(h^4)$	$a$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$-27/96$
		$b$	$11/15$	$2/15$	$2/15$	$25/96$
		$c$	$2/15$	$2/15$	$11/15$	$25/96$
		$d$	$2/15$	$11/15$	$2/15$	$25/96$
	$R=O(h^4)$	$a$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$27/120$
		$b$	$1/2$	0	$1/2$	$5/120$
		$c$	$1/2$	$1/2$	0	$5/120$
		$d$	0	$1/2$	$1/2$	$3/120$
		$e$	0	0	1	$3/120$
		$f$	1	0	0	$3/120$
		$g$	0	1	0	$3/120$
	$R=O(h^6)$	$a$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0,11250
		$b$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	0,66197075
		$c$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	0,66197075
		$d$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	0,66197075
		$e$	$\gamma$	$\gamma$	$\Delta$	0,06296959
		$f$	$\Delta$	$\gamma$	$\gamma$	0,06296959
$\alpha=0,05961587$ $\beta=0,47014206$ $\gamma=0,10128651$ $\Delta=0,79742699$		$g$	$\gamma$	$\Delta$	$\gamma$	

ся схемой второго порядка точности. Координаты точек интегрирования:

$$L_1=L_3=\frac{1}{2}, \quad L_2=0,$$

$$L_1=L_2=\frac{1}{2}, \quad L_3=0$$

и

$$L_2=L_3=\frac{1}{2}, \quad L_1=0.$$

Каждая точка интегрирования имеет весовой коэффициент  $1/6$ . Интеграл в (14.13) преобразуется к виду

$$Z = \int_0^1 \int_0^{1-L_2} \left( -\frac{3}{8} L_2^2 + \frac{10}{8} L_2 L_3 - \frac{3}{8} L_3^2 \right) |\det [J]| dL_1 dL_2 = \\ = \sum_{i=1}^3 W_i g_i (L_1, L_2, L_3),$$

где

$$g_i (L_1, L_2, L_3) = \left( -\frac{6}{16} L_2^2 + \frac{20}{16} L_2 L_3 - \frac{6}{16} L_3^2 \right) |\det [J]|,$$

или

$$g_i (L_1, L_2, L_3) = -6L_2^2 + 20L_2 L_3 - 6L_3^2,$$

так как

$$|\det [J]| = 16.$$

Для первой точки интегрирования  $L_1=L_3=1/2$ ,  $L_2=0$  и

$$g_1 = -6L_3^2 = -\frac{3}{2}.$$

Для других точек интегрирования

$$g_2 = -\frac{3}{2}$$

и

$$g_3 = 2.$$

Подставляя эти результаты в формулу (14.13), получаем

$$Z = \frac{1}{6} g_1 + \frac{1}{6} g_2 + \frac{1}{6} g_3 = \frac{1}{6} \left( -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2 \right) = -\frac{1}{6}$$

Интеграл от произведения  $(\partial N_4 / \partial x \partial N_4 / \partial y)$  может быть вычислен также с помощью интегральных формул, приведенных в гл. 3. Используем равенство

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} \int_A -\frac{3}{8} L_2^2 dA &= -\frac{3}{8} \frac{2!}{4!} 2A = -\frac{3A}{8(6)}, \\ \int_A \frac{10}{8} L_2 L_3 dA &= \frac{10}{8} \frac{1!1!}{4!} 2A = \frac{20A}{8(24)}, \\ \int_A -\frac{3}{8} L_3^2 dA &= -\frac{3A}{8(6)}. \end{aligned}$$

Площадь элемента может быть вычислена с помощью формулы (3.9), что дает  $A=8$ . Окончательно получаем

$$\int_A \left( \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial y} \right) dA = \frac{8}{8} \left( -\frac{3}{6} + \frac{20}{24} - \frac{3}{6} \right) = -\frac{1}{6}.$$

Этот результат в точности совпадает со значением, которое было получено численным методом.

В формулы для матриц элементов входят два типа поверхностных интегралов:

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS \quad \text{и} \quad \int_{S_1} a [N]^T dS, \quad (14.14)$$

где  $a$  — коэффициент вида  $hT_\infty$ ,  $q$  или  $p_x$ . Эти интегралы могут быть очень просто определены с помощью соотношений, представленных в гл. 3. Наиболее просто вычисляется второй интеграл в (14.14), поэтому мы начнем с него.

Допустим, что требуется вычислить интеграл  $\int_S q [N]^T dS$  вдоль стороны  $L_1=0$  квадратичного элемента, изображенного на фиг. 14.3, б. Запишем функции формы

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, & N_4 &= 4L_2L_3, \\ N_2 &= 0, & N_5 &= L_3(2L_3-1), \\ N_3 &= L_2(2L_2-1), & N_6 &= 0. \end{aligned}$$

Теперь можно записать интеграл в виде

$$\int_S q[N]^T dS = \int_{\mathcal{L}_{345}} q \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2(2L_2-1) \\ 4L_2L_3 \\ L_3(2L_3-1) \\ 0 \end{Bmatrix} dS = \frac{q\mathcal{L}_{345}}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (14.15)$$

где  $\mathcal{L}_{345}$  — длина стороны  $L_1=0$ . Толщина элемента предполагается единичной. Окончательный результат получается такой же, как в случае одномерного квадратичного элемента: величина  $q$  распределяется по трем узлам элемента в отношении  $1/6, 2/3, 1/6$ . Формулы, аналогичные (14.15), могут быть выведены и для других сторон элемента.

Интеграл  $\int_S q[N]^T dS$  равен

$$\frac{q\mathcal{L}_{4567}}{8} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14.16)$$

для стороны  $L_1=0$  кубического элемента.  $\mathcal{L}_{4567}$  — длина стороны, содержащей узлы 4, 5, 6 и 7. Соотношения (14.15) и (14.16) не применимы к осесимметрическим задачам, если рассматриваемая сторона параллельна оси симметрии (всем узлам, расположенным на этой стороне, соответствует одно и то же значение радиуса).

Поверхностный интеграл  $\int_S h[N]^T [N] dS$  вычисляется таким же образом, как (14.15) и (14.16). Запишем окончательные выражения для стороны  $L_1=0$  в случае квадратичного и кубического элементов:

$$\int_{S_{345}} h[N]^T [N] dS = \frac{h\mathcal{L}_{345}}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.17)$$

$$\int_{S_{4567}} h [N]^T [N] dS =$$

$$= \frac{h^2 \mathcal{L}_{4567}}{1680} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 128 & 99 & -36 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 & 648 & -81 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & -81 & 648 & 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & -36 & 99 & 128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.18)$$

Соотношения, подобные (14.17) и (14.18), для других сторон записываются аналогично. Значения ненулевых коэффициентов не изменяются, меняется их положение внутри матрицы.

#### 14.4. Тетраэдральные элементы

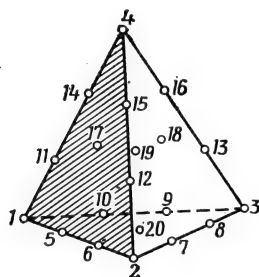
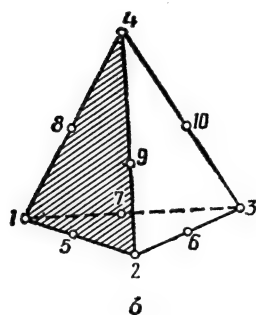
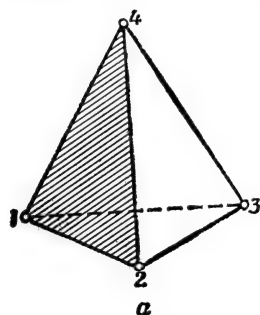
Естественная система координат для тетраэдрального элемента вводится почти так же, как в случае плоских  $L$ -координат. Четыре безразмерных расстояния  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и  $L_4$  определяются как отношения расстояний от выбранной произвольной точки элемента до одной из его сторон к высоте, опущенной на эту сторону из противоположащей вершины. Такие  $L$ -координаты называются объемными, они связаны между собой соотношением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (14.19)$$

Функции формы для линейного тетраэдра представляют собой объемные  $L$ -координаты:

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3 \quad \text{и} \quad N_4 = L_4. \quad (14.20)$$

Функции формы для элементов высокого порядка могут быть получены из формулы (14.4) с учетом того, что  $F_0$  теперь определяются уравнениями плоскостей, проходящих через соответствующие узлы, а не уравнениями прямых, как в случае треугольника. Ниже приводятся типичные функции формы для элементов различного порядка; элементы изображены на фиг. 14.4.



Фиг. 14.4. Расположение узлов в линейном (а), квадратичном (б) и кубичном (в) тетраэдральных элементах. Узлы 17—20 расположены на гранях тетраэдра.

### Квадратичный тетраэдр (10 узлов)

Для углового узла

$$N_1 = (2L_1 - 1) L_1. \quad (14.21)$$

В этом случае плоскость, определяемая уравнением  $L_1=0$ , содержит узлы 2, 3, 4, 6, 9 и 10. Плоскость, определяемая уравнением  $L_1=1/2$ , охватывает узлы 5, 7 и 8. Для узла на ребре

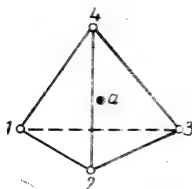
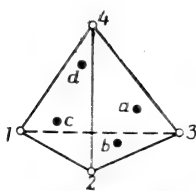
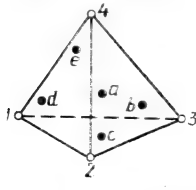
$$N_5=4L_1L_2. \quad (14.22)$$

В этом случае плоскость  $L_2=0$  содержит узлы 1, 3, 4, 7, 8 и 10.

### Кубичный тетраэдр (20 узлов)

Таблица 14.2

#### Формулы численного интегрирования для тетраэдра

	Ошибка	Точки	Координаты				Весовые коэффициенты
	$R=O(h^2)$	$a$	$L_1^1$ $1/4$	$L_2$ $1/4$	$L_3$ $1/4$	$L_4$ $1/4$	1
 <p><math>\alpha=0,58541020</math> <math>\beta=0,13819660</math></p>	$R=O(h^3)$	$a$ $b$ $c$ $d$	$\alpha$ $\beta$ $\beta$ $\beta$	$\beta$ $\alpha$ $\beta$ $\beta$	$\beta$ $\beta$ $\alpha$ $\beta$	$\beta$ $\beta$ $\alpha$ $\alpha$	$1/4$ $1/4$ $1/4$ $1/4$
 <p><math>\alpha=0,58541020</math> <math>\beta=0,13819660</math></p>	$R=O(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$	$1/4$ $1/3$ $1/6$ $1/6$ $1/6$	$1/4$ $1/6$ $1/3$ $1/6$ $1/6$	$1/4$ $1/6$ $1/6$ $1/3$ $1/6$	$1/4$ $1/6$ $1/6$ $1/6$ $1/3$	$-16/20$ $9/20$ $9/20$ $9/20$ $9/20$

<sup>1)</sup>  $L_1$  — перпендикуляр к грани напротив первого узла.

Для углового узла

$$N_1 = \frac{1}{2} (3L_1 - 1) (3L_1 - 2) L_1. \quad (14.23)$$

Для узла на ребре

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1). \quad (14.24)$$

Для узла на грани

$$N_{18} = 27 L_2 L_3 L_4. \quad (14.25)$$

Сравнение формул (14.20) — (14.25) с двумерными функциями формы, данными на фиг. 14.3, показывает, что недостающие формулы могут быть легко получены. В табл. 14.2 приведены точки интегрирования для тетраэдра, используемые при численном интегрировании.

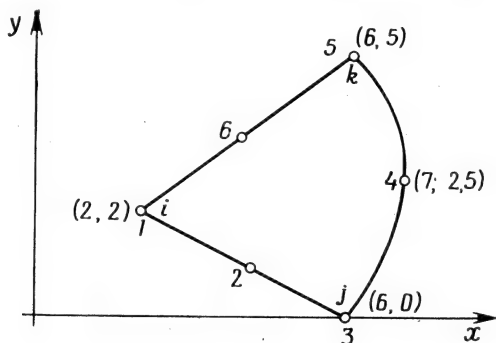
### Задачи

146. Определите функцию формы  $N_8$  для кубического элемента.

147. Определите функцию формы  $N_{11}$  для элемента четвертого порядка в задаче 143.

148. Получите матрицу Якоби для элемента в задаче 144, используя для задания формы элемента квадратичные функции формы.

149. Получите матрицу Якоби для элемента, показанного ниже.

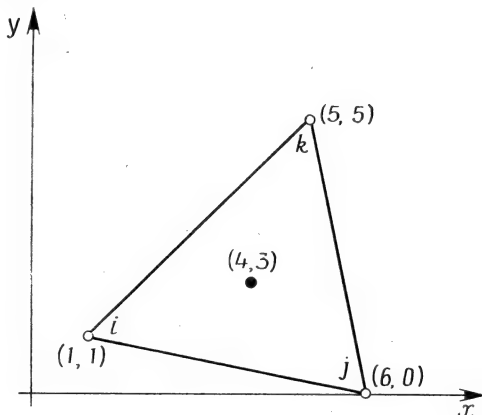


К задаче 149.

150. Используя квадратичный интерполяционный полином, вычислите частные производные  $\partial N_2 / \partial x$  и  $\partial N_2 / \partial y$  во внутренней точке (4, 3) элемента, изображенного ниже.

151. Вычислите  $\partial N_6/\partial x$  и  $\partial N_6/\partial y$  для элемента задачи 150.

152. Определите численно интеграл по объему элемента из задачи 150 от произведения величин  $\partial N_2/\partial x$  и  $\partial N_2/\partial y$ . Результат сравните с соответствующим значением, полученным путем точного интегрирования.



К задаче 150.

153. Вычислите численно интеграл по объему элемента из задачи 150 от произведения величин  $\partial N_6/\partial x$  и  $\partial N_6/\partial y$ . Результат сравните со значением, полученным путем точного интегрирования.

154. Покажите на конкретном примере, что при рассмотрении линейного треугольного элемента достаточно одной точки интегрирования для того, чтобы вычислить интеграл от произведения величин  $\partial N_i/\partial x$  и  $\partial N_j/\partial x$ .

155. Напишите подпрограмму, которая сможет вычислять все частные производные от функций формы по  $x$  и по  $y$ , если интерполяционная функция квадратична, а геометрия элемента может быть описана линейными функциями формы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hammer P. C., Marlowe O. P., Stroud A. H., Numerical Integration over Simplexes and Cones, *Mathematics Tables Aids Comp.*, 10, 130—137 (1956).

## Глава 15

### ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

До сих пор применения метода конечных элементов были связаны с использованием одномерных линейных элементов, двумерных треугольных элементов и трехмерного тетраэдра. Теперь рассмотрим новую группу элементов: двумерный четырехугольник и трехмерную призму.

Четырехугольный элемент представляет собой мультиплекс-элемент. Границы такого элемента должны быть параллельны координатным линиям для сохранения непрерывности при переходе от одного элемента к другому. Прямоугольный элемент является специальным случаем четырехугольника. Свойства прямоугольного элемента служат основой для применения криволинейной системы координат, необходимой при использовании четырехугольного элемента. Прямоугольный элемент рассматривается в первом разделе, а затем полученные результаты обобщаются на случай линейных квадратичных и кубичных четырехугольных элементов.

#### 15.1. Линейный четырехугольный элемент

Интерполяционный полином для прямоугольного элемента с четырьмя узлами имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy. \quad (15.1)$$

Вместо членов  $x^2$  или  $y^2$  здесь оставлено произведение  $xy$ , потому что оно гарантирует линейное изменение  $\varphi$  вдоль каждой линии, где постоянны  $x$  или  $y$ .

Пронумерованные узлы и расположение системы координат показаны на фиг. 15.1. В узлах должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_1 \quad \text{при} \quad x = -b, \quad y = -a, \\ \varphi &= \Phi_2 \quad \text{при} \quad x = b, \quad y = -a, \\ \varphi &= \Phi_3 \quad \text{при} \quad x = b, \quad y = a, \\ \varphi &= \Phi_4 \quad \text{при} \quad x = -b, \quad y = a. \end{aligned}$$

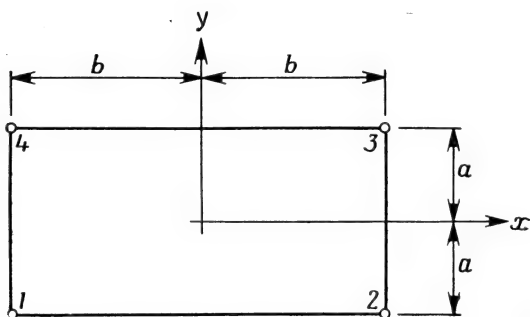
Подстановка этих выражений в формулу (15.1) приводит к системе четырех уравнений, которые могут быть решены относительно  $\alpha$ :

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4},$$

$$\alpha_2 = \frac{-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4}{4b},$$

$$\alpha_3 = \frac{-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4a},$$

$$\alpha_4 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4}{4ab}.$$



Фиг. 15.1. Прямоугольный элемент.

Если положить  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = C$ , то  $\alpha_1 = C$  и  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ . Таким образом, критерий сходимости выполняется. Подставим  $\alpha_p$  в исходное соотношение и преобразуем его к виду

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4 = [N] \{\Phi\}, \quad (15.2)$$

где

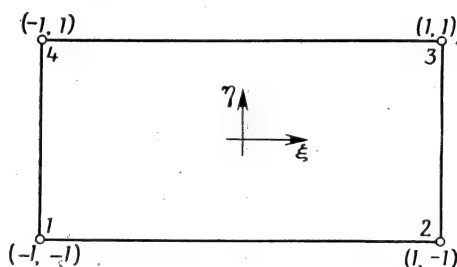
$$N_1 = \frac{1}{4ab} (b-x)(a-y), \quad N_2 = \frac{1}{4ab} (b+x)(a-y),$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab} (b+x)(a+y), \quad N_4 = \frac{1}{4ab} (b-x)(a+y).$$

Одно из главных различий между этим элементом и симплекс-элементами состоит в том, что градиенты теперь не постоянны, а меняются линейно вдоль одного из координатных направлений. Например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x.$$

Градиент в направлении оси  $x$  постоянен вдоль оси  $x$ , но меняется линейно по  $y$ , и, наоборот,  $\partial\varphi/\partial y$  постоянна по  $y$ , но линейно изменяется вдоль оси  $x$ .



Фиг. 15.2. Система координат  $\xi\eta$  для прямоугольного элемента.

Полученные результаты для прямоугольного элемента могут быть записаны в безразмерной форме с помощью отношений  $x/b$  и  $y/b$ . Начнем с  $N_1$ :

$$N_1 = \frac{1}{4ab} (b-x)(a-y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right),$$

где

$$-1 \leq \frac{x}{b} \leq 1 \quad \text{и} \quad -1 \leq \frac{y}{a} \leq 1.$$

Если обозначить эти отношения как

$$\xi = \frac{x}{b} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad (15.3)$$

то функции формы в соотношении (15.2) могут быть представлены в виде произведений безразмерных координат

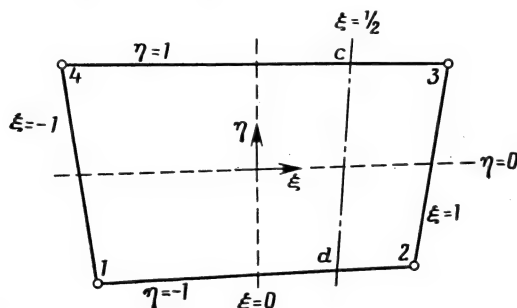
$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4,$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Схематически этот элемент показан на фиг. 15.2. Введенная только что система координат называется естественной системой координат, потому что координаты при этом изменяются в диапазоне  $\pm 1$ .

Совсем не обязательно требовать, чтобы естественная система координат была прямоугольной, она может быть и криволинейной. Использование криволинейной системы координат позволяет изменять ориентацию сторон четырехугольника относительно си-



Фиг. 15.3. Четырехугольный элемент общего вида.

стемы координат  $xu$ , при этом требование непрерывности будет удовлетворяться. Пример четырехугольного элемента общего вида показан на фиг. 15.3. Началу координат соответствует точка пересечения двух линий, делящих пополам противоположные стороны элемента (штриховые линии на фиг. 15.3). Линия, соответствующая  $\xi = 1/2$ , также показана на фиг. 15.3. Эта линия не параллельна оси  $\eta$ , она проходит через средние точки  $c$  и  $d$  отрезков верхней и нижней сторон четырехугольника, ограниченных линиями  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

Функции формы для элемента, показанного на фиг. 15.3, идентичны функциям формы, представленным формулами (15.4). Заметим, однако, что теперь нельзя получить частные производные  $\partial N_\beta / \partial x$  и  $\partial N_\beta / \partial y$  непосредственно. Необходимы еще формулы преобразования координат, чтобы связать систему  $\xi\eta$  с системой  $xu$ .

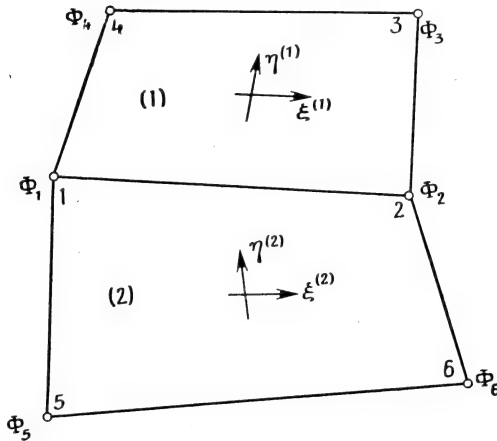
Сохранение непрерывности вдоль границ между элементами — главное преимущество системы  $\xi\eta$ . Стороны четырехугольников при этом не должны оставаться параллельными координатным линиям системы  $xu$ . Непрерывность вдоль границ между элементами может быть доказана рассмотрением двух смежных элементов (фиг. 15.4). Запишем интерполяционные полиномы для каждого элемента:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4, \\ \varphi^{(2)} &= N_1^{(2)}\Phi_5 + N_2^{(2)}\Phi_6 + N_3^{(2)}\Phi_2 + N_4^{(2)}\Phi_1,\end{aligned}\tag{15.5}$$

где  $N_\beta^{(e)}$  определена в (15.4). Так как мы интересуемся тем, что происходит на границе между двумя элементами, можно положить

$\eta^{(1)} = -1$  и  $\eta^{(2)} = 1$  в выражениях для соответствующих функций формы. При этом получают следующие выражения:

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= \frac{1}{2} [1 - \xi^{(1)}], \\ N_2^{(1)} &= \frac{1}{2} [1 + \xi^{(1)}], \\ N_3^{(1)} &= N_4^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (15.6)$$



Фиг. 15.4. Четырехугольные элементы с общей границей.

для первого элемента и

$$\begin{aligned} N_1^{(2)} &= 0 = N_2^{(2)}, \\ N_3^{(2)} &= \frac{1}{2} [1 + \xi^{(2)}], \\ N_4^{(2)} &= \frac{1}{2} [1 - \xi^{(2)}] \end{aligned} \quad (15.7)$$

для второго элемента. Формулы для  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  упрощаются:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2, \\ \varphi^{(2)} &= N_3^{(2)} \Phi_2 + N_4^{(2)} \Phi_1. \end{aligned} \quad (15.8)$$

С учетом выражений для функций формы получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \frac{1}{2} [(1 - \xi^{(1)}) \Phi_1 + (1 + \xi^{(1)}) \Phi_2], \\ \varphi^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{2} [1 + \xi^{(2)}] \Phi_2 + [1 - \xi^{(2)}] \Phi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Замечая, что в каждой точке границы выполняется очевидное равенство  $\xi^{(1)} = \xi^{(2)}$ , можно переписать формулу для  $\varphi^{(2)}$  в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \{ [1 + \xi^{(1)}] \Phi_2 + [1 - \xi^{(1)}] \Phi_1 \} = \varphi^{(1)}. \quad (15.10)$$

Таким образом, скалярные величины непрерывны вдоль границы двух смежных элементов. Непрерывность векторных величин тоже может быть доказана, хотя это доказательство несколько сложнее.

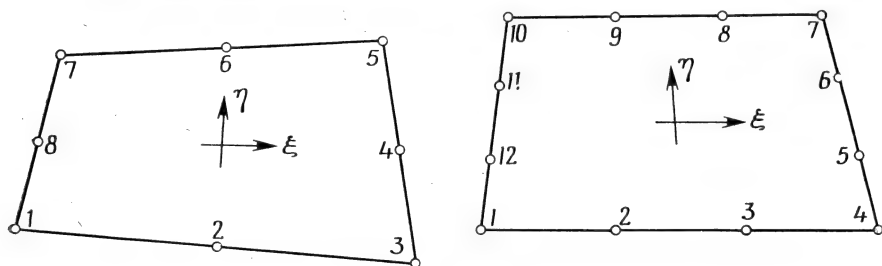
Итак, была введена криволинейная система координат  $\xi\eta$  и доказана непрерывность величин вдоль границы смежных элементов. Теперь можно рассмотреть четырехугольные элементы с более чем четырьмя узлами.

## 15.2. Квадратичные и кубические четырехугольные элементы

Четырехугольные элементы, обсуждавшиеся в предыдущем разделе, называются линейными, потому что им соответствуют интерполяционные полиномы, линейные по  $\xi$  вдоль линий  $\eta = \text{const}$  и по  $\eta$  вдоль линий  $\xi = \text{const}$ . В этом разделе рассматриваются четырехугольные элементы, содержащие 8 и 12 узлов. Такие элементы называются соответственно квадратичными и кубическими элементами, так как их интерполяционные полиномы являются квадратичными или кубическими функциями вдоль линий  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ . Существуют элементы, содержащие более 12 узлов, или элементы с числом узлов от 8 до 12, но они не обсуждаются здесь. Элементов трех типов, которые мы рассматриваем, вполне достаточно как для иллюстрации основных понятий, так и для большинства расчетов.

Интерполяционные полиномы соответственно для квадратичного и кубического элементов (фиг. 15.5) записываются в виде

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \quad (15.11)$$

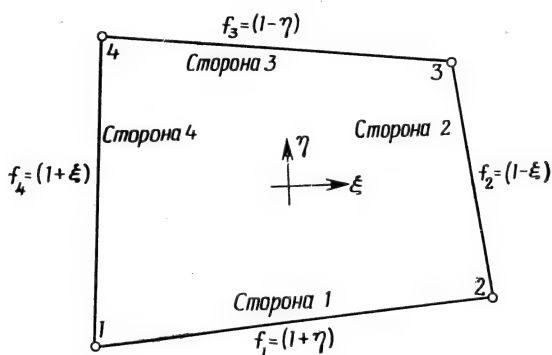


Фиг. 15.5. Квадратичный и кубический четырехугольные элементы.

и

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 + \alpha_9 \xi^3 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3. \quad (15.12)$$

Функции формы для этих элементов представляют собой полиномы, идентичные по форме (15.11) и (15.12). Функции формы для двумерных элементов равны нулю во всех узлах, за исключением узла, номер которого совпадает с номером соответствующей функции формы; кроме того, они принимают нулевые значения вдоль всех границ элемента, которые не содержат указанного узла. Например, функция формы  $N_1$  для квадратичного элемента (фиг. 15.5) обращается в нуль во всех узлах, за исключением первого узла. Кроме того,  $N_1$  принимает нулевые значения вдоль сто-



Фиг. 15.6. Граничные функции четырехугольного элемента.

рон четырехугольника  $\xi=1$  и  $\eta=1$ . Функция формы для второго узла обращается в нуль вдоль сторон  $\xi=1$ ,  $\eta=-1$  и  $\eta=1$ .

Функции формы могут быть получены либо путем решения системы уравнений (гл. 3), либо непосредственно комбинированием функций, которые обращаются в нуль на границах элемента. Множество функций, равных нулю вдоль одной из сторон элемента, легко получить из функций формы для линейного четырехугольника. Эти функции показаны на фиг. 15.6. Произведение любых двух таких функций соответствует первым четырем членам в формулах (15.11) и (15.12). Поэтому удобно записать функции формы в виде произведения двух полиномов:

для квадратичного элемента

$$N_\beta = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta) (a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta), \quad (15.13)$$

для кубичного элемента

$$N_\beta = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta) (a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \eta^2). \quad (15.14)$$

Остановимся теперь на определении постоянных, входящих в последние соотношения. В качестве базисных функций выберем следующие:

$$\begin{aligned} f_1 &= (1 + \eta), \\ f_2 &= (1 - \xi), \\ f_3 &= (1 - \eta), \\ f_4 &= (1 + \xi). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Каждая из них обращается в нуль на одной из границ элемента.

Введем еще множество функций  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$F_k = \begin{cases} f_k, & \text{если узел } \beta \text{ не принадлежит стороне } k, \\ & k = 1, 2, 3, 4, \\ 1, & \text{если узел } \beta \text{ принадлежит стороне } k. \end{cases} \quad (15.16)$$

Функция формы для квадратичного и кубического элементов дается формулой

$$N_\beta = \left[ \prod_{j=1}^4 F_j \right] (a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \eta^2). \quad (15.17)$$

Степень многочлена в (15.17) определяется числом имеющихся узловых условий. Его коэффициенты определяются приравниванием  $N_\beta$  единице в узле  $\beta$  и нулю во всех других узловых точках, которые не входят в произведение  $\prod_{j=1}^4 F_j$ . Коэффициенты  $a_4$  и  $a_5$  всегда равны нулю в случае квадратичного элемента. Применение формулы (15.17) будет проиллюстрировано на двух следующих частных примерах.

### Пример

157. Требуется определить  $N_1$  и  $N_2$  для квадратичного элемента, показанного на фиг. 15.5.

Решение начнем с определения функций  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  в (15.16). Так как первый узел угловой и принадлежит одновременно первой и четвертой сторонам, то  $F_1 = 1$  и  $F_4 = 1$ . Другие две функции следующие:  $F_2 = f_2 = (1 - \xi)$  и  $F_3 = f_3 = (1 - \eta)$  [формулы (15.15)]. Произведение в (15.17) равно

$$\prod_{j=1}^4 F_j = 1(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 = (1 - \xi)(1 - \eta).$$

Общее выражение для  $N_1$  имеет вид

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta).$$

Произведение  $(1 - \xi)(1 - \eta)$  обращает в нуль  $N_1$  в узлах 3, 4, 5, 6 и 7. Константы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  должны быть выбраны так, чтобы  $N_1$  была равна единице в первом узле и нулю в узлах 2 и 8. Подстановка этих трех узловых условий

$$N_1 = 1, \text{ если } \xi = -1, \eta = -1,$$

$$N_1 = 0, \text{ если } \xi = 0, \eta = -1,$$

$$N_1 = 0, \text{ если } \xi = -1, \eta = 0,$$

в формулу для  $N_1$  дает три уравнения, которые могут быть решены относительно неизвестных констант. В результате имеем

$$a_1 = a_2 = a_3 = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, функция формы  $N_1$  имеет вид

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta).$$

Функция формы  $N_2$  соответствует средней точке первой стороны, поэтому

$$F_1 = 1, F_2 = f_2 = (1 - \xi),$$

$$F_3 = f_3 = (1 - \eta) \text{ и } F_4 = f_4 = (1 + \xi).$$

После вычисления произведения в формуле (15.17) получаем

$$N_2 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta).$$

Остается удовлетворить только одному узловому условию  $N_2 = 1$  при  $\xi = 0$  и  $\eta = -1$ , поэтому в многочлене  $(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)$  следует сохранить только один член с произвольной константой. Таким образом, для  $N_2$  получаем выражение

$$N_2 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi)a_1.$$

После подстановки этого выражения в узловое условие имеем

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

и

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta).$$

### Пример

158. Требуется определить функцию формы  $N_2$  для кубического четырехугольного элемента, показанного на фиг. 15.5.

Узел 2 принадлежит первой стороне элемента, поэтому из приведенного выше примера можно заключить, что

$$N_2 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2).$$

Полином, содержащий произвольные константы, должен быть усечен, так как не выполнены всего два узловых условия

$$N_2 = 1 \quad \text{при} \quad \xi = -\frac{1}{3}, \quad \eta = -1$$

и

$$N_2 = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \frac{1}{3}, \quad \eta = -1.$$

Коэффициенты  $a_4$  и  $a_5$  должны быть вычеркнуты, поскольку члены вида  $\xi^4$  или  $\xi^2\eta^2$  не входят в формулу (15.12). Сохранение члена  $a_3\eta$  приводит к системе уравнений с нулевым определителем, поэтому этот член тоже должен быть зачеркнут. Таким образом, для  $N_2$  имеем

$$N_2 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)(a_1 + a_2\xi).$$

Используя условия в узлах, получаем систему

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) 2(a_1 - a_2/3) = 1,$$

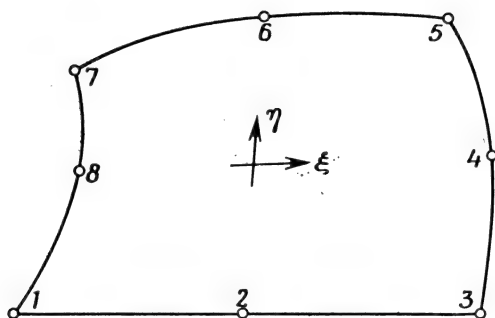
$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) 2(a_1 + a_2/3) = 0,$$

откуда находим  $a_1 = 9/32$  и  $a_2 = -27/32$ . Окончательное выражение для функции формы имеет вид

$$N_2 = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - 3\xi).$$

Функции формы для квадратичного и кубического элементов приведены на фиг. 15.7 и 15.8. Простым сложением можно убедиться, что эти функции формы удовлетворяют критерию  $\sum_{\beta=1}^r N_\beta = 1$  для каждого элемента.

Представленную здесь процедуру можно применить и к элементам более высокого порядка. Однако необходимость использования таких элементов весьма сомнительна. Трех представленных здесь элементов вместе с элементами, описанными в гл. 13 и 14, достаточно для решения едва ли не любых задач. Можно построить четырехугольные элементы и других типов, например скон-



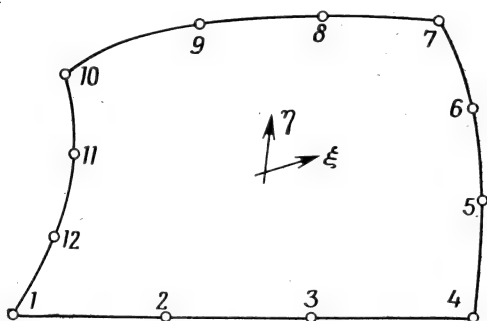
Фиг. 15.7. Функции формы для квадратичного элемента.

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi).$$



Фиг. 15.8. Функции формы для кубического элемента:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)], \quad N_2 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi),$$

$$N_3 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi), \quad N_4 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)],$$

$$N_5 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta), \quad N_6 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta),$$

$$N_7 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)], \quad N_8 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi),$$

$$N_9 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi), \quad N_{10} = \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)],$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta), \quad N_{12} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta).$$

струировать элементы, интерполяционные функции которых будут представлены полиномами разной степени по каждой из двух координат. Рассмотрим, например, интерполяционный полином, линейный по  $\eta$  и квадратичный по  $\xi$ . Соответствующий ему элемент будет содержать шесть узлов, как показано в задаче 162 (в конце этой главы). Полином вида

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta \xi^2 \quad (15.18)$$

сводится к

$$\varphi = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2, \quad \text{если } \eta \text{ постоянна,}$$

и к

$$\varphi = b_1 + b_2 \eta, \quad \text{если } \xi \text{ постоянна.}$$

Здесь  $a_1, a_2, a_3, b_1$  и  $b_2$  — константы. Область применения этого элемента, вероятно, очень ограничена; соответствующие функции формы могут быть получены исследователем, использующим элемент.

### 15.3. Вычисление производных функций формы

Формулы для вычисления производных  $\partial N_\beta / \partial x$  и  $\partial N_\beta / \partial y$  получают непосредственно из результатов, приведенных в предыдущих главах. Матрица Якоби определяется соотношением

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (15.19)$$

которое можно обратить, чтобы получить частные производные по  $x$  и по  $y$ .

Матрица Якоби является функцией  $\xi$  и  $\eta$  даже для простейших четырехугольных элементов. Эта зависимость легко обнаруживается при рассмотрении преобразования координат:

$$x = R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 + R_4 X_4, \quad (15.20)$$

где функции формы те же, что даны в (15.4), а  $X_1, X_2, X_3, X_4$  —  $x$ -координаты четырех вершин.  $R_\beta$  используется здесь для обозначения функций, определяющих форму элемента. Дифференцируя  $x$  по  $\xi$ , получаем

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial R_1}{\partial \xi} X_1 + \frac{\partial R_2}{\partial \xi} X_2 + \frac{\partial R_3}{\partial \xi} X_3 + \frac{\partial R_4}{\partial \xi} X_4,$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} = -\frac{1-\eta}{4}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \xi} &= \frac{1-\eta}{4}, \\ \frac{\partial R_3}{\partial \xi} &= \frac{1+\eta}{4}\end{aligned}\quad (15.21)$$

и

$$\frac{\partial R_4}{\partial \xi} = -\frac{1+\eta}{4}.$$

После подстановки и перемножения имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{-(1-\eta)X_1 + (1-\eta)X_2 + (1+\eta)X_3 - (1+\eta)X_4}{4}.$$

Отсюда видно, что коэффициенты матрицы  $[J]$  являются функциями  $\xi$  и  $\eta$ .

### Пример

159. Требуется найти частные производные  $\partial N_i/\partial x$  и  $\partial N_i/\partial y$  в точке  $\xi=1/2$ ,  $\eta=1/2$  элемента, изображенного ниже, в предположении, что скалярная величина  $\varphi$  аппроксимируется квадратичным полиномом. Запишем формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned}x &= R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4, \\ y &= R_1Y_1 + R_2Y_2 + R_3Y_3 + R_4Y_4,\end{aligned}$$

где  $R_\beta$  — линейная функция формы. Для скаляра  $\varphi$  имеем соотношение

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4 + N_5\Phi_5 + N_6\Phi_6 + N_7\Phi_7 + N_8\Phi_8,$$

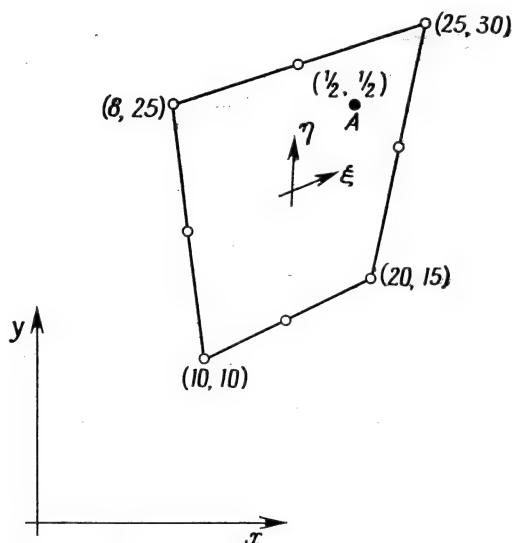
где  $N_\beta$  — функции формы, представленные на фиг. 15.7.

Прежде всего составим матрицу Якоби. Производная  $\partial R_\beta/\partial \xi$  приведена в (15.21). Вычислим  $\partial R_\beta/\partial \eta$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial \eta} &= -\frac{1-\xi}{4}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial \eta} = -\frac{1+\xi}{4}, \\ \frac{\partial R_3}{\partial \eta} &= \frac{1+\xi}{4}, \quad \frac{\partial R_4}{\partial \eta} = \frac{1-\xi}{4}.\end{aligned}$$

Матрица Якоби теперь записывается в виде

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix}.$$



К задаче 159.

Подстановка координатных значений  $\xi$  и  $\eta$  вместе с узловыми значениями  $x$  и  $y$  дает

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 3/2 & -3/2 \\ -1/2 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 15 \\ 25 & 30 \\ 8 & 25 \end{bmatrix},$$

или

$$[J] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 61 & 20 \\ 13 & 60 \end{bmatrix}$$

и

$$[J]^{-1} = \frac{8}{3400} \begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -13 & 61 \end{bmatrix}.$$

Искомые величины  $\partial N_1 / \partial x$  и  $\partial N_1 / \partial y$  можно вычислить, если известны производные  $\partial N_1 / \partial \xi$  и  $\partial N_1 / \partial \eta$ :

$$N_1 = - \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta + \xi)}{4}.$$

Дифференцируя  $N_1$ , получаем

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{(1 - \eta)(2\xi + \eta)}{4}$$

и

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{(1 - \xi)(2\eta + \xi)}{4}.$$

Вычисляя эти величины в точке  $\xi = 1/2$ ,  $\eta = 1/2$ , имеем

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{2 \cdot 1/2 + 1/2}{4} = \frac{3}{16}$$

и

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{2 \cdot 1/2 + 1/2}{4} = \frac{3}{16}.$$

После перемножения матриц получаем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{8}{3400} \begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -13 & 61 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3/16 \\ 3/16 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 144 \\ 6800 \end{Bmatrix},$$

или

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{15}{850} \text{ и } \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{18}{850}.$$

#### 15.4. Соотношения, определяющие элементы

Чтобы получить соотношения, определяющие элемент, необходимо вычислить объемные и поверхностные интегралы:

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_1} h [N]^T [N] dS, \\ [f^{(e)}] &= \int_{S_2} h T_\infty [N]^T dS, \\ [c^{(e)}] &= \int_V [N]^T [N] dV. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Замену переменных интегрирования можно сделать с помощью соотношения

$$dV = |\det [J]| t d\xi d\eta, \quad (15.23)$$

где  $t$  — толщина элемента. Объемные интегралы в (15.22) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T [D] [B] dV &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det [J]| d\eta d\xi, \\ \int_V [N]^T [N] dV &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] |\det [J]| d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Переход к переменным интегрирования  $\xi$  и  $\eta$  упрощает пределы интегрирования, что позволяет избежать трудностей, возникающих при рассмотрении элементов с криволинейными границами.

Объемные интегралы в (15.24) записываются в общем виде следующим образом:

$$Z = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (15.25)$$

Этот интеграл может быть определен численно: сначала вычисляется внутренний интеграл, в котором  $\xi$  считается постоянной, а затем вычисляется внешний интеграл. Вычисление внутреннего интеграла дает

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi, \eta_j) = g(\xi), \quad (15.26)$$

где  $g(\xi)$  — функция от  $\xi$ . Внешний интеграл теперь записывается в виде

$$Z = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i g(\xi_i). \quad (15.27)$$

Последнее выражение после подстановки  $g(\xi)$  по формуле (15.26) принимает вид

$$Z = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i \left[ \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_i, \eta_j) \right],$$

или

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j). \quad (15.28)$$

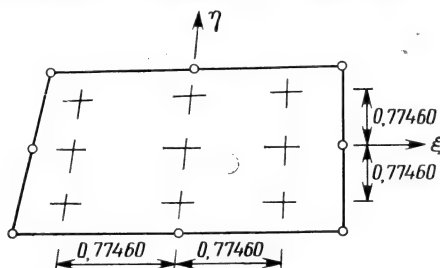
Порядок квадратурных формул, требуемый для точного вычисления объемных интегралов, дан в табл. 15.1. Для определения

Таблица 15.1

Порядок квадратур Гаусса—Лежандра  
для двумерных элементов

Элемент	$[N]^T [N]$	$[B]^T [B]$	$[N]^T$
	$\xi, \eta$	$\xi, \eta$	$\xi, \eta$
Линейный	2,2	2,2	1,1
Квадратичный	3,3	2,2	2,2
Кубичный	4,4	3,3	2,2

матриц элемента в случае линейного четырехугольника необходимы четыре точки интегрирования, для кубичного четырехугольника требуется уже 16 точек интегрирования. Эти точки интегрирования располагаются по элементу симметрично в соответствии



Фиг. 15.9. Точки интегрирования, соответствующие численному интегрированию выражения  $[N]^T [N]$  по квадратичному элементу.

со значениями координат, представленными в табл. 13.2. Расположение точек для квадратичного четырехугольника показано на фиг. 15.9.

Применение формул (15.28) требует большого объема вычислений и не иллюстрируется здесь. Процедура расчетов по формуле (15.28) совпадает с той, которая проиллюстрирована в гл. 13. Различие заключается только в большем числе точек интегрирования.

Для составления матриц элемента в (15.22) необходимо определить два поверхностных интеграла:

$$\int_{S_2} h [N]^T [N] dS \quad \text{и} \quad \int_{S_2} h T_{\infty} [N]^T dS. \quad (15.29)$$

Вычисление этих интегралов является относительно простой операцией, если элемент ограничен прямолинейными сторонами, но становится более сложным в случае криволинейных сторон.

Если стороны элемента прямолинейные, проще всего интегралы в (15.29) вычисляются аналитически. После вычисления коэффициентов матриц они могут быть сохранены в машинной памяти для дальнейшего использования. Рассмотрим линейный четырехугольный элемент, на второй стороне которого (узлы 2 и 3) наблюдается конвективный теплообмен. Вычисление интегралов начнем с вычисления функций формы при  $\xi=1$ , что соответствует рассматриваемой стороне. Вспоминая функции формы (15.4), имеем

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} = 0, \quad \text{если } \xi=1,$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} = \frac{1-\eta}{2},$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} = \frac{1+\eta}{2},$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} = 0.$$

Запишем произведение  $[N]^T[N]$ :

$$\begin{aligned} [N]^T[N] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\eta \\ 1+\eta \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} [0 \quad (1-\eta) \quad (1+\eta) \quad 0] = \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & (1-\eta)^2 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15.30)$$

От нуля отличны только те члены, которые связаны с рассматриваемыми узлами.

Далее необходимо связать дифференциал длины  $dS$  с дифференциалом переменной интегрирования  $d\eta$ . Преимущество интегрирования по  $\eta$  заключается в том, что при этом просто записываются пределы интегрирования. Дифференциалы  $dS$  и  $d\eta$  связаны соотношением

$$dS = |\det[J]| d\eta, \quad (15.31)$$

в котором  $|\det[J]|$  определяется зависимостью

$$S = \frac{1}{2} (1+\eta) \mathcal{L}, \quad (15.32)$$

где  $\mathcal{L}$  — длина стороны между узлами 2 и 3. Матрица Якоби  $[J]$  для данной одномерной зависимости имеет вид

$$\frac{dS}{d\eta} = \frac{1}{2} \mathcal{L} = [J]. \quad (15.33)$$

Таким образом, имеет место равенство  $|\det[J]| = \mathcal{L}/2$ , и дифференциалы связаны соотношением

$$dS = \frac{\mathcal{L}}{2} d\eta. \quad (15.34)$$

Подстановка выражений (15.30) и (15.34) в (15.29) дает

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \frac{h}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & (1-\eta^2) & 0 \\ 0 & (1-\eta^2) & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathcal{L}}{2} d\eta, \quad (15.35)$$

$$h \int_S [N]^T [N] dS = \frac{h\mathcal{L}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.36)$$

Отметим, что ненулевые коэффициенты в (15.36) изменяют свое положение в зависимости от того, какая сторона элемента рассматривается. Двойки при этом всегда остаются на главной диагонали, а единицы располагаются вне ее. Чтобы убедиться в этом, читатель сам может показать, что

$$h \int_S [N]^T [N] dS = \frac{h\mathcal{L}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (15.37)$$

для стороны, содержащей первый и четвертый узлы.

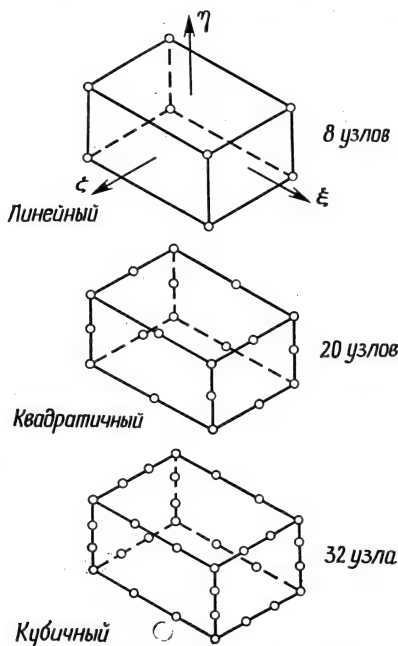
После приведенного рассмотрения вычисление второго интеграла в (15.29) не составляет труда. Используя матрицу функций формы  $[N]^T$  из (15.30) и соотношение (15.34), находим

$$hT_\infty \int_S [N]^T dS = \frac{hT_\infty}{2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ (1-\eta) \\ (1+\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{L}{2} d\eta = \frac{h\mathcal{L}T_\infty}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (15.38)$$

Значения ненулевых коэффициентов в матрицах, получаемых в результате вычисления интегралов (15.29), идентичны значениям, полученным для треугольных элементов. Соотношения (14.17) и (14.18) могут быть применены и к четырехугольным элементам. Выведенные выше формулы могут быть также использованы для элементов с криволинейными границами, при этом величина  $\mathcal{L}$  представляет собой длину дуги рассматриваемой стороны. Этот факт непосредственно следует из соотношения (15.32), в котором длина дуги  $y$  выражается через  $\xi$  (или  $\eta$ ) с помощью соответствующих функций формы.

## 15.5. Прямоугольные призмы

Рассмотрим трехмерные элементы, которые принадлежат тому же семейству, что и четырехугольник. Семейство трехмерных призм в координатах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  изображено на **фиг. 15.10**. Функции



Фиг. 15.10. Элементы в виде призм для трехмерных моделей.

формы для этих элементов приведены только в общем виде из-за большого числа узловых точек. Используя обозначения

$$\xi_0 = \xi \xi_\beta, \quad \eta_0 = \eta \eta_\beta, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_\beta, \quad (15.39)$$

запишем следующие соотношения для функций формы.

*Линейный элемент (8 узлов)*

$$N_\beta = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0). \quad (15.40)$$

Для примера рассмотрим определение  $N_1$ . В этом случае, учитывая формулы (15.39), имеем

$$\xi_0 = \xi \xi_1 = -\xi,$$

так как  $\xi_1 = -1$ ,  $\eta_0 = -\eta$ ,  $\zeta_0 = -\zeta$ . Используя эти выражения, получаем для  $N_1$  следующее соотношение:

$$N_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta).$$

*Квадратичный элемент (20 узлов)*

Для угловых узлов

$$N_\beta = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2). \quad (15.41)$$

Для узлов на ребрах

$$\xi_\beta = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \zeta = \pm 1, \quad (15.42)$$

$$N_\beta = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0).$$

Соответствующие выражения для узлов на других ребрах получаются перестановкой координат.

*Кубичный элемент (32 узла)*

Для угловых узлов

$$N_\beta = \frac{1}{64} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19]. \quad (15.43)$$

Для узлов на ребрах

$$\xi = \pm \frac{1}{3}, \quad \eta_\beta = \pm 1, \quad \zeta = \pm 1, \quad (15.44)$$

$$N_\beta = \frac{9}{64} (1 - \xi)^2 (1 + 9\xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0).$$

Приведенные выше выражения сводятся к их двумерному аналогу при  $\zeta = \pm 1$ . Так как при  $\xi = \pm 1$  или  $\eta = \pm 1$  двумерные функции формы сводятся к одномерным функциям формы, рассмотренные трехмерные элементы могут быть объединены в один класс с соответствующими плоскими или одномерными элементами.

В случае трехмерных элементов сохранение непрерывности при переходе от одного элемента к другому означает непрерывность по поверхности, общей для двух соседних элементов. Таким образом, функции формы должны быть такими, чтобы неизвестные величины однозначно определялись их узловыми значениями в точках поверхности, общей для двух элементов. Приведенные выше функции формы обладают этим свойством.

Процедура составления матриц элемента почти идентична той, которую мы обсудили при рассмотрении четырехугольного элемента. Матрица Якоби теперь имеет размеры  $3 \times 3$ , число точек интегрирования при вычислении величины  $[B]^T[B]$  равно  $2^3 = 8$ , 27 и 64 соответственно для линейного, квадратичного и кубического

элементов. При этом предполагается симметрия в аппроксимирующем полиноме (порядок полинома по каждой из координат один и тот же). Общая форма интегралов записывается как

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) |\det [J]| d\xi d\eta d\zeta = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (15.45)$$

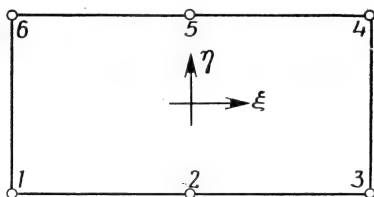
Очевидно, что определение матриц элемента в данном случае требует большого объема вычислений. Для получения матрицы  $[k^{(e)}]$  в случае кубического элемента должны быть вычислены 64 матрицы каждая размером  $32 \times 32$ . Для составления матрицы линейного элемента требуется вычислить 16 матриц размером  $8 \times 8$ , в случае квадратичного элемента необходимо вычислить 27 матриц размером  $20 \times 20$ . Поскольку ЭВМ легко справится с такими расчетами, приведенные цифры не должны удерживать от использования квадратичных и кубических элементов.

### Задачи

160. Получите выражения для функций формы  $N_3$  и  $N_4$  квадратичного четырехугольного элемента.

161. Получите выражения для функций формы  $N_5$  и  $N_7$  кубического четырехугольного элемента.

162. Получите выражения для функций формы четырехугольного элемента, изображенного ниже.



К задаче 162.

163. Определите порядок интегрирования, необходимый для численного определения интеграла  $\int [N]^T [N] dV$  в случае элемента из задачи 162.

164. Вычислите частные производные  $\partial N_2 / \partial x$  и  $\partial N_2 / \partial y$  в точке  $\xi = 1/2, \eta = -1$  элемента из задачи 159.

165. Вычислите частные производные  $\partial N_3/\partial x$  и  $\partial N_3/\partial y$  в точке  $\xi = -1/4$ ,  $\eta = 1/2$  элемента из задачи 159.

166. Напишите подпрограмму, которая будет вычислять частные производные функций формы по  $x$  и  $y$ . Зависимость  $x$  и  $y$  от естественных координат считайте линейной, а для  $\phi$  используйте выражение (15.11). Координаты  $(\xi, \eta)$  точки, в которой вычисляются производные, должны вводиться в подпрограмму в качестве исходных данных.

167. Проинтегрируйте численно  $\int_S [N]^T dS$  вдоль границы  $\eta = 1$  квадратичного элемента и сравните результат со значением, полученным аналитически.

168. Составьте блок-схему программы численного интегрирования  $\int_V [N]^T [N] dV$ . Зависимость  $x$  и  $y$  от естественных координат считайте линейной, для  $\phi$  используйте выражение (15.11).

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Cook R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, N. Y., 1974.  
Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 16

### ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. МАШИННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

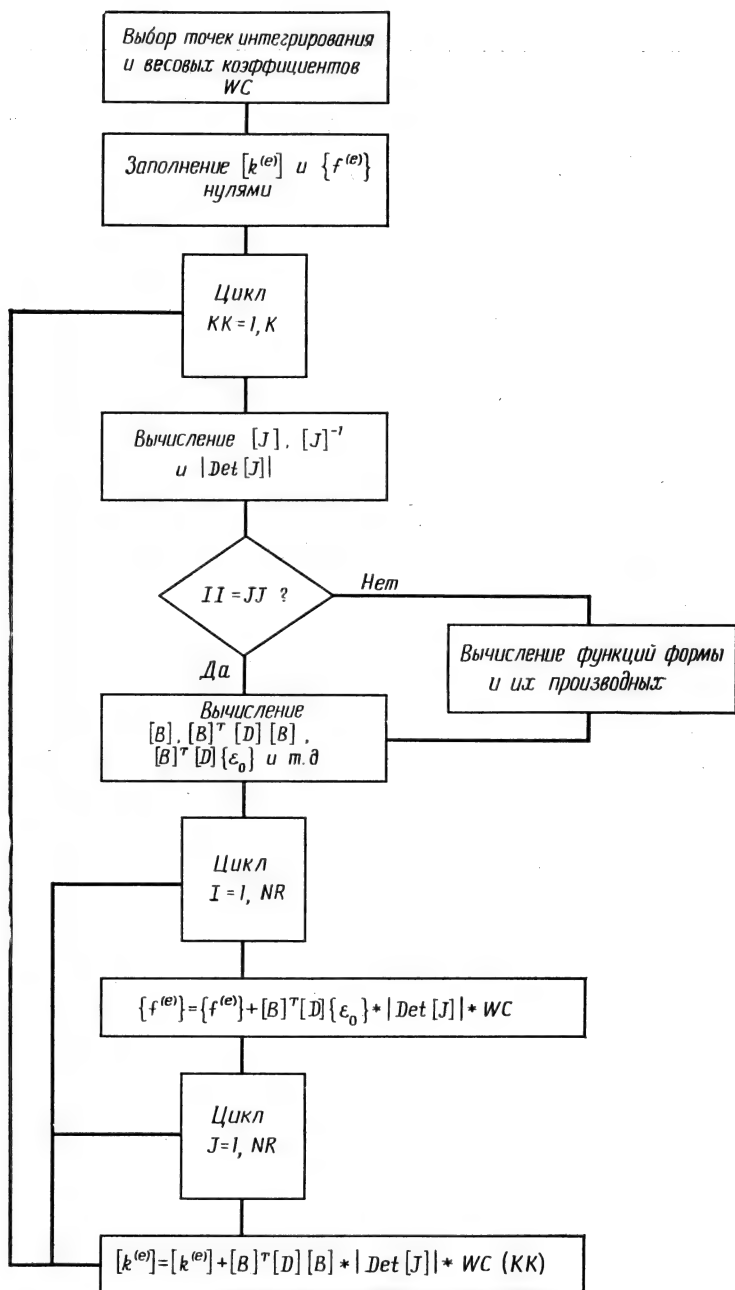
В гл. 13—15 обсуждались общие свойства элементов высокого порядка. Был рассмотрен только один пример использования этих элементов, а именно в задаче о переносе тепла в стержне был применен одномерный квадратичный элемент. Вопрос о том, как выполнить надлежащие расчеты с помощью ЭВМ, не обсуждался. Настоящая глава завершает рассмотрение элементов высокого порядка. Здесь будет описана машинная реализация указанных элементов, приведены три конкретных примера, а также будет показано, как определить координаты узлов, расположенных на криволинейных границах.

#### 16.1. Машинная реализация

Вычисление матриц элемента в случае использования элементов высокого порядка требует выполнения большого числа арифметических операций, которые проще всего проводить с помощью быстродействующей цифровой вычислительной машины. Последовательность выполнения операций не зависит от типа элемента. Общая блок-схема вычисления матриц элемента представлена на фиг. 16.1. Рассмотрим основные этапы вычислений по этой схеме.

Отправной точкой в расчетах является выбор точек интегрирования и весовых коэффициентов для численного интегрирования. Число точек интегрирования зависит от порядка интерполяционного полинома, который в свою очередь определяется тем, какой элемент используется при построении дискретной модели. Информация о типе и порядке (линейный, квадратичный, кубический и т. д.) элемента должна быть введена в ЭВМ до того, как начнется вычисление матриц элемента. Эта информация обычно вводится вместе с номерами узлов элемента. Порядок элемента должен быть определен при задании геометрии элемента и при интерполировании искомой величины по ее узловым значениям.

Значения координат точек интегрирования и весовых коэффициентов вычисляются в отдельной подпрограмме. Правильные значения этих величин для рассматриваемого элемента получаются при использовании ряда условных операторов IF, определяющих тип элемента (треугольный, четырехугольный и т. д.) и его



Фиг. 16.1. Блок-схема численного определения матриц элемента.

$K$  — число точек интегрирования;  $NR$  — число строк и столбцов в матрицах;  $II$  — порядок элемента полинома, используемый для задания формы элемента;  $JJ$  — порядок элемента, используемый при определении узловых параметров.

порядок. Необходимо также сохранить для основной программы величину, соответствующую числу точек интегрирования, так как эта величина потребуется в качестве параметра цикла, в котором выполняется численное интегрирование.

Составление матрицы Якоби, обратной к ней матрицы и вычисление ее определителя составляют первый этап работы цикла, в котором вычисляются коэффициенты матриц элементов. Необходимые для составления матрицы Якоби частные производные вычисляются в подпрограмме, которая определяет как функции формы  $R_i$ , так и их производные  $\partial R_i/\partial \xi$  и  $\partial R_i/\partial \eta$ . Выбор соответствующего множества функций формы осуществляется с помощью условных операторов IF, устанавливающих тип и порядок элемента.

После того как вычисление матрицы Якоби завершено, нужно решить, какими функциями формы будем пользоваться для интерполирования величины  $\varphi$ . Будут ли это те же самые функции формы, которые использовались для получения матрицы Якоби, или они будут другими? Если это те же самые функции формы, т. е. элемент изопараметрический, то  $N_i$ ,  $\partial N_i/\partial \xi$ ,  $\partial N_i/\partial \eta$  и т. д. совпадают с  $R_i$ ,  $\partial R_i/\partial \xi$  и т. д., использованными для получения матрицы Якоби, и можно приступить непосредственно к вычислению частных производных  $\partial N_i/\partial x$ ,  $\partial N_i/\partial y$  и  $\partial N_i/\partial z$ . Если интерполяционный полином для  $\varphi$  отличается от полинома, который применялся для задания формы элемента (субпараметрический или суперпараметрический элемент), то необходимо вычислить  $N_i$ ,  $\partial N_i/\partial \xi$ ,  $\partial N_i/\partial \eta$  и т. д., прежде чем приступить к следующему шагу.

Частные производные по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяются в подпрограмме, которая выполняет умножение вектор-столбца, содержащего  $\partial N_i/\partial \xi$  и т. д., на матрицу Якоби. Зная частные производные, можно построить матрицу градиентов  $[B]$  и вычислить все подынтегральные выражения, такие, как  $[B]^T[D][B]$ ,  $[B]^T[D]\{\epsilon_0\}$ . Элементы матриц  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  теперь получаются умножением соответствующих значений подынтегральных выражений на весовые коэффициенты и сложением полученных величин с результатами аналогичных операций, уже выполненных для других точек интегрирования. Поскольку  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  получаются путем суммирования, элементы этих матриц должны быть приравнены нулю перед началом работы внешнего цикла.

Для определения результатов элемента необходимы частные производные  $\partial N_i/\partial x$  и т. д. Поэтому процедура вычисления этих величин включает многие из тех расчетов, которые производятся при составлении матриц элемента. Результаты элемента могут быть вычислены в точках интегрирования или в любых других точках внутри элемента. Координаты точек, отличных от точек интегрирования, должны быть указаны для каждого элемента.

## 16.2. Примеры применения

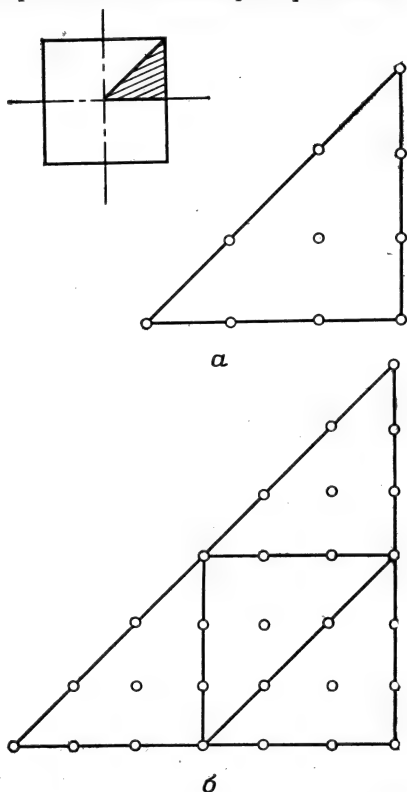
В этом разделе обсуждается решение трех задач, рассмотренных ранее. Будут рассмотрены кручение стержня с поперечным сечением в виде квадрата, распределение температуры вблизи кабеля, а также распределение напряжений в области выточки. Каждая из этих задач была решена ранее с использованием треугольного симплекс-элемента. Мы сравним результаты, полученные с помощью элементов высокого порядка, с данными, которые получаются при использовании симплекс-элементов.

### 16.2.1. Кручение стержня квадратного сечения

В гл. 7 были найдены сдвиговые напряжения в стержне квадратного сечения со стороной 1 см, подверженном действию крутящего момента величиной 196 Н·см. Из соображений симметрии рассматривалась часть стержня в виде прямоугольного треугольника, который разбивался на 64 элемента с 45 узлами. Было получено максимальное значение  $\tau_{xy} = 915 \text{ Н/см}^2$ , которое отличается от теоретического максимума  $945 \text{ Н/см}^2$  на 3,2%.

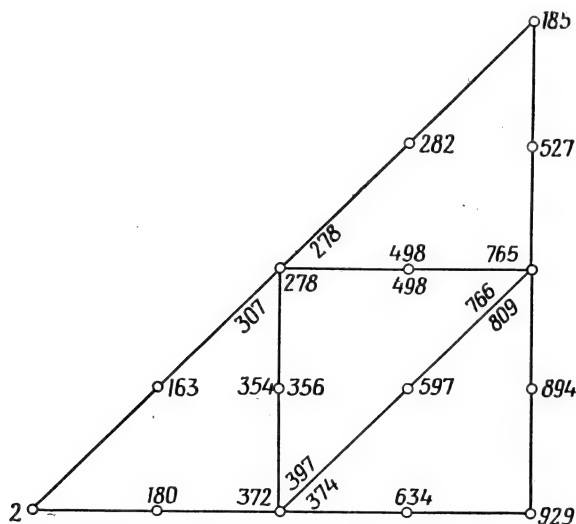
Задача о кручении стержня была решена дважды путем разбиения исходной области на кубические треугольные элементы. В обоих случаях для задания формы элемента использовались линейные функции формы для треугольника. В первом случае для разбиения применялся только один элемент (фиг. 16.2, а), во втором случае область разбивалась на четыре элемента (фиг. 16.2, б). В обоих случаях наибольшее сдвиговое напряжение было получено в вершине прямого угла исходной треугольной области.

В одноэлементной модели максимальное значение  $\tau_{yz}$  равно  $890 \text{ Н/см}^2$ . Это значение практически совпадает со значением, полученным при использовании 64



Фиг. 16.2. Разбиение области на элементы в задаче о кручении.

симплекс-элементов ( $892 \text{ Н/см}^2$ ) до применения теории согласованных результатов элементов. В случае разбиения области на четыре кубичных треугольных элемента максимальное значение  $\tau_{zy}$  равно  $929 \text{ Н/см}^2$ . Эта величина только на  $1,7\%$  меньше теоретического максимума  $945 \text{ Н/см}^2$ .

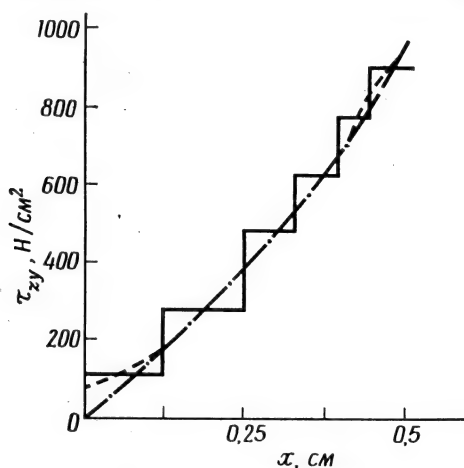


Фиг. 16.3. Значения напряжения  $\tau_{zy}$  в отдельных точках области (напряжение  $\tau_{zy}$  вычислялось в узловых точках).  $G=8 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$ ,  $\vartheta = 1^\circ$  на  $100 \text{ см}$ ,  $2G\vartheta = 2791 \text{ Н·рад/см}^3$ .

При использовании элементов высокого порядка исчезает необходимость в применении теории согласованных результатов элементов, потому что результаты элемента теперь являются функциями координат и могут быть вычислены в произвольной точке. На фиг. 16.3 представлены значения  $\tau_{zy}$  в точках, расположенных на границах элементов. Заметим, что точкам, которые являются общими для двух и большего числа элементов, соответствует несколько чисел. Эти числа могут существенно отличаться по величине. То же самое наблюдается при вычислении любой другой величины, зависящей от производных искомой функции. Последнее обстоятельство указывает на то, что в точке, общей для смежных элементов, поверхность, соответствующая искомой функции, имеет по разным направлениям различные углы наклона. Полученные значения можно уточнить, если использовать при разбиении области элементы меньших размеров.

Главное отличие, которое получается при вычислении результатов элемента с использованием симплекс-элементов и элемен-

тов высокого порядка, иллюстрируется на фиг. 16.4, где показано изменение величины  $\tau_{zy}$  вдоль оси  $x$ . При использовании симплекс-элементов напряжения получается постоянным в каждом элементе, что соответствует ступенчатому изменению напряжения при переходе от одного элемента к другому. В случае применения теории согласованных результатов распределение  $\tau_{yz}$  получается не-



Фиг. 16.4. Распределение по оси  $x$  значений  $\tau_{zy}$ , вычисленных тремя различными методами.

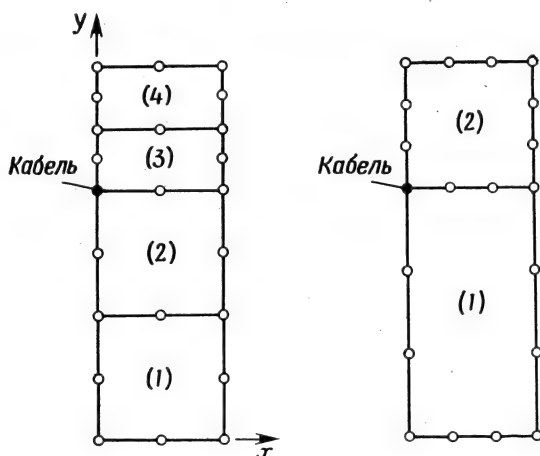
—— симплекс-элементы; — — — согласованные напряжения; - · - · - четыре кубич. треугольных элемента.

прерывным, но оно отклоняется от истинных значений в центре и на границе области. Значения, полученные с помощью модели из четырех кубичных треугольников, тоже непрерывны, но они равны нулю в центре квадрата и правильно отражают распределение напряжений вблизи границы области. Значение в точке  $x=0,25$  см получено усреднением по трем значениям  $\tau_{yz}$ .

Применение элементов высокого порядка уменьшает не только количество требуемых данных, но и размер результирующей системы уравнений. Десять уравнений были решены в случае одноэлементной модели, для четырехэлементной модели решалась система из 28 уравнений. В обоих случаях число уравнений меньше 45, т. е. меньше числа уравнений, полученных при использовании симплекс-элементов. Кроме того, при использовании элементов высокого порядка отпадает необходимость в применении теории согласованных результатов элемента. Таким образом, исключается из рассмотрения еще одна система из 45 уравнений. В результате сокращения числа уравнений уменьшаются время решения их на ЭВМ и объем требуемой машинной памяти.

### 16.2.2. Распределение температуры вблизи кабеля

Задача, в которой рассматривался кабель, помещенный в теплопроводящую среду, была решена в гл. 8 (фиг. 8.6), причем исходная область разбивалась на 96 элементов с 65 узлами. Эта область была рассмотрена с применением разбиения на четыре



Фиг. 16.5. Четырехугольные элементы, используемые при исследовании переноса тепла вокруг кабеля.

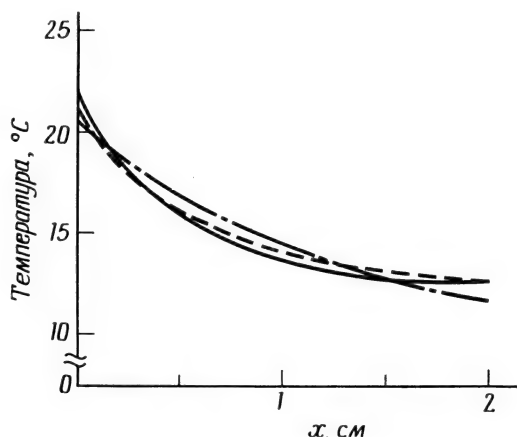
квадратичных четырехугольных элемента, а также разбиения на два кубических четырехугольных элемента. Эти элементы были расположены (фиг. 16.5) так, чтобы кабель находился в узле.

Сравнение результатов, полученных для трех различных моделей, проведено на фиг. 16.6, где показано распределение температуры вдоль линии  $y=4$  см. Модель, использующая симплекс-элементы, и модель из четырех четырехугольных элементов дают по существу совпадающие результаты, тогда как двухэлементной модели соответствуют меньшие значения температуры в точке расположения кабеля и на оси симметрии (правая граница области) и большие значения температуры на отрезке от 0,25 до 1,5 см. Температура кабеля равна 21,8, 21,1 и 20,4 °C соответственно для модели, использующей симплекс-элементы, четырехэлементной и двухэлементной моделей. Как видно, различие в приведенных значениях температуры кабеля не существенно, а значения температуры в точках верхней границы области, вычисленные по трем моделям, отличаются не более чем на 0,5 °C.

Модель из четырех четырехугольных элементов, видимо, точнее двухэлементной, так как на большей части первого элемента в двухэлементной модели температура получается постоянной

(15 °C), что затрудняет моделирование изменения температуры вдоль линии, проходящей через точку расположения кабеля. В случае четырехэлементной модели зона постоянной температуры отделена от кабеля.

В результате использования элементов высокого порядка опять наблюдается значительное сокращение числа уравнений. Так, для



Фиг. 16.6. Распределение температуры в горизонтальной плоскости, содержащей точку расположения кабеля.

— симплекс-элементы; — — — четыре четырехугольных элемента; — · — два четырехугольных элемента.

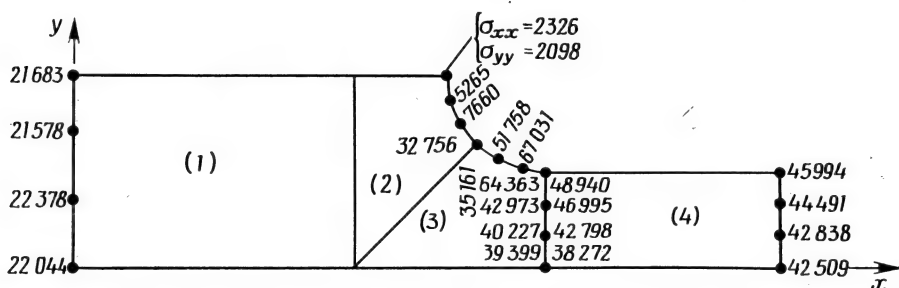
четырёхэлементной модели необходимо решить систему из 23 уравнений, для двухэлементной модели это число равно 19 вместо 65 уравнений для модели, сконструированной с использованием симплекс-элементов.

### 16.2.3. Концентрация напряжений в зоне выточки

Анализ концентрации напряжений в зоне выточки при растяжении детали конструкции (фиг. 12.4) был проведен с помощью четырехугольных квадратичных элементов. Причем были взяты те же элементы, которые использовались для предварительного разбиения области при генерировании исходных данных элемента для симплексной модели (фиг. 12.5).

Значения главного напряжения  $\sigma_1$  на концах области и в зоне выточки, соответствующие четырехэлементной модели, показаны на фиг. 16.7. Средние по узлам значения  $\sigma$  на правом и левом концах детали составляют 21 918 и 43 952 Н/см<sup>2</sup> соответственно, что близко к истинным значениям 22 000 и 44 000 Н/см<sup>2</sup>. Однако в зоне выточки получаются сомнительные значения  $\sigma$ . Во-первых,

значения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  в вершине прямого угла не равны нулю, как это должно быть на самом деле, а составляют величины порядка  $2000 \text{ Н/см}^2$ . Узловому значению верхнего из узлов, общих для третьего и четвертого элементов, соответствуют два числа, отличающихся между собой примерно на  $15\,000 \text{ Н/см}^2$ . Все это пока-



Фиг. 16.7. Некоторые значения  $\sigma_1$  для модели из четырех элементов в виде четырехугольников.

зывает, что данное разбиение области на элементы еще не достаточно мелкое. Величины напряжений вдоль криволинейной границы выточки очень сильно изменяются, и для моделирования этих значений двух уравнений явно недостаточно. Наибольшее значение  $\sigma_1$  получается порядка  $67\,000 \text{ Н/см}^2$ . Это соответствует коэффициенту концентрации напряжений 1,52, что отличается от принятого значения 1,42 на 7%.

При более мелком разбиении области на элементы можно ожидать получения более точных значений напряжений. Определение координат узлов и перфорирование исходных данных при более мелком разбиении требует больших затрат времени, так что применение элементов высокого порядка больше не ускоряет решение проблемы. Решение, данное в гл. 12, видимо, самое простое, и нужно отдать предпочтение именно ему. Использование большого числа малых простых элементов также дает возможность аппроксимировать перемещения вдоль границы выточки с достаточной степенью точности. Главный недостаток в использовании симплекс-элементов состоит в необходимости решать еще одну систему уравнений для получения узловых значений компонент напряжений.

### 16.3. Криволинейные границы

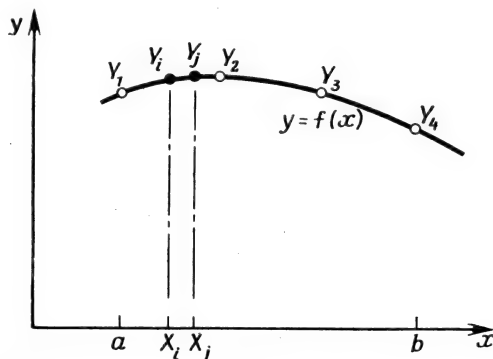
Размещение узлов при задании формы элемента и определение узловых значений  $\{f^{(e)}\}$  не составляют большого труда, когда границы элемента прямолинейные. Однако наличие напряжений или конвективного теплообмена на криволинейных границах резко

усложняет определение  $\{f^{(e)}\}$  и  $[k^{(e)}]$ . Распределение поверхностной нагрузки по узлам одинаково ( $1/6$ ,  $2/3$ ,  $1/6$  или  $1/8$ ,  $3/8$ ,  $3/8$ ,  $1/8$  в случае квадратичного и кубического элементов), но длина границы должна быть использована в расчетах. Вычисление длины криволинейной границы и составляет содержание данного раздела.

Математически длина дуги определяется интегралом

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (16.1)$$

где  $y=f(x)$ , а точки  $a$  и  $b$  соответствуют границам дуги. В соотношении (16.1) суммируются длины  $d\mathcal{L}$ , каждая из которых вычисляется по формуле  $d\mathcal{L}^2 = dx^2 + dy^2$ . Интегрирование в (16.1) может быть заменено приближенно вычислением длины  $d\mathcal{L}$  для каждого малого приращения  $x$  с дальнейшим суммированием по всем приращениям.



Фиг. 16.8. Аппроксимация кривой с использованием четырех узлов.

Для вычисления приращения длины дуги  $d\mathcal{L}$  можно использовать одномерные функции формы. Рассмотрим кривую  $y=f(x)$  на фиг. 16.8 с определенными граничными точками  $a$  и  $b$ . Если кривая аппроксимируется кубичным полиномом, необходимы два дополнительных узла. Расположим их так, чтобы они делили кривую между точками  $a$  и  $b$  на участки равной длины. После того как значения  $y$  в четырех узлах  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  и  $Y_4$  определены, аппроксимирующее соотношение для  $y$  записывается в виде

$$y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}. \quad (16.2)$$

Следующий шаг состоит в делении оси  $x$  на отдельные отрезки (числом от 50 до 100) и вычислении длин дуг, соответствующих каждому отрезку оси, по формуле

$$d\mathcal{L} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}. \quad (16.3)$$

Сложение длин всех этих дуг дает длину дуги кривой в целом.

Итак, в случае криволинейной границы возникает необходимость определения координат одной или двух точек, которые делят кривую на два или три участка равной длины. Расположение этих точек может быть определено в результате запоминания накапливаемых приращений длины дуги по  $x$ . Как только полная длина дуги станет известна, сравнительно просто пройти отрезок в обратном направлении и найти две точки на оси  $x$ , между которыми должен располагаться узел. Далее, считая изменение функции между этими двумя точками оси  $x$  линейным, определяем  $x$ -координату узла. После определения  $x$ -координаты узла, его  $y$ -координата вычисляется по формуле (16.2).

## Задачи

**169.** Напишите программу для определения длины кривой, которая аппроксимируется кубичным одномерным элементом. Проверьте программу, рассматривая кривую  $y = 2 + x^2$  на отрезке от  $x = 1$  до  $x = 2$ . Сравните результаты вычислений по программе с результатами, полученными по формуле (16.1).

## Глава 17

### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Уравнения для элементов, которые использовались в главах прикладного характера, были выведены в гл. 5 путем минимизации либо энергии деформации, либо функционала, связанного с рассматриваемым дифференциальным уравнением. Существуют другие способы получения уравнений для элементов. Преимуществом этих способов является то, что отправной точкой для них служит непосредственно само дифференциальное уравнение и, кроме того, они исключают необходимость вариационной формулировки физической задачи. Один из способов, известный как метод Галёркина, был предложен в 1915 г. Галёркиным как приближенный метод решения краевых задач. В сочетании с интерполяционными соотношениями метода конечных элементов метод Галёркина весьма эффективен при решении как краевых задач, так и задачи Коши.

В этой главе обсуждается применение метода Галёркина к решению дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Эти области приложения достаточно хорошо иллюстрируют реализацию метода Галёркина, а также показывают возможность его применения в других прикладных областях.

#### 17.1. Метод Галёркина

Метод Галёркина обсуждался многими авторами. Применения этого метода в сочетании с конечно-элементной моделью рассматривались в работах [2, 3, 6]. Подробное изложение его содержится также в работе [4]. С помощью метода Галёркина получается приближенное решение дифференциального уравнения. При этом должно выполняться следующее условие: разность между приближенным и точным решениями должна быть ортогональна функциям, используемым при аппроксимации.

Если исходить из дифференциального уравнения  $Lu - f = 0$  ( $L$  — дифференциальный оператор) и приближенное решение искать в виде  $\bar{u} = \sum N_i U_i$ , то для него будем иметь  $L\bar{u} - f = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — остаток или ошибка, поскольку это решение только приближенное. Мы хотим сделать  $\varepsilon$  малой величиной, насколько это возможно. При использовании одного из способов сделать  $\varepsilon$  как мож-

но меньшей величиной требуется выполнение равенства  $\int_R N_i \epsilon dR = 0$  для каждой из базисных функций  $N_i$ . Это равенство математически означает, что базисные функции должны быть ортогональны ошибке по области  $R$ .

Применение метода Галёркина в сочетании с методом конечных элементов приводит к уравнениям

$$\int_R N_\beta L(\varphi) dR = 0, \quad \beta = i, j, k, \dots, \quad (17.1)$$

где  $\varphi$  — искомая величина, которая аппроксимируется соотношением

$$\varphi = [N_i, N_j, N_k, \dots] \{\Phi\}, \quad (17.2)$$

а  $L\varphi$  — дифференциальное уравнение, определяющее  $\varphi$ . Пусть

$$L(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0,$$

тогда формула (17.1) принимает вид

$$\int_0^L N_\beta \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0. \quad (17.3)$$

Верхний предел интегрирования равен длине одномерной области, в которой ищется решение.

Высший порядок производных, которые могут содержаться в  $L(\varphi)$ , не ограничен, он определяется физическим смыслом задачи. Однако высший порядок производных, который допустим в (17.1), на единицу больше порядка непрерывности интерполяционных соотношений. Так как все интерполяционные соотношения в этой книге нулевого порядка непрерывности (непрерывна  $\varphi$ , но не ее первая производная), в уравнения (17.1) могут быть включены производные порядка не выше первого. Это ограничение может вызвать некоторые сложности, но большинство из них можно преодолеть сокращением порядка  $L(\varphi)$ , используя интегрирование по частям.

## 17.2. Изгиб балки

Уравнение упругой линии балки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (17.4)$$

служит удобной отправной точкой для данного обсуждения; оно описывает одномерную задачу, и, кроме того, это одно из уравнений, которые наиболее часто рассматриваются инженерами. На-

помним, что  $M$  — изгибающий момент в произвольной точке  $x$  балки, Н·см,  $E$  — модуль упругости, Н/см<sup>2</sup>,  $I$  — момент инерции сечения, см<sup>4</sup>, и  $y$  — прогиб балки, см. Будем предполагать, что  $M$  — известная функция координаты  $x$ , тем самым  $M/EI$  будем считать заданной величиной.

Применение метода Галёркина к уравнению (17.4) приводит к соотношению

$$\int_0^L [N]^T \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0. \quad (17.5)$$

Интерполяционная функция для  $y$  определена на отдельном элементе, поэтому уравнение (17.5) должно быть переписано в виде суммы

$$\sum_{e=1}^R \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx, \quad (17.6)$$

где  $R$  — число элементов, а  $L^{(e)}$  — длина отдельного элемента. Прежде чем начинать вычисления, необходимо выбрать функции формы  $[N^{(e)}]$  и преобразовать интеграл (17.6) таким образом, чтобы он содержал производные порядка не выше первого.

Ограничимся линейной моделью для  $y$ :

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \frac{x}{L} \right] \left\{ \frac{Y_i}{Y_j} \right\} = [N^{(e)}] \{Y\}. \quad (17.7)$$

Момент  $M$  — функция длины элемента, величина  $M/EI$ <sup>1)</sup> может быть аппроксимирована также с помощью линейной модели:

$$\frac{M}{EI} = [N^{(e)}] \left\{ \frac{M_i/EI}{M_j/EI} \right\}. \quad (17.8)$$

Интеграл

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

преобразуем путем интегрирования по частям, что дает

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 y}{dx^2} dx = [N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx. \quad (17.9)$$

<sup>1)</sup> Эта величина представляет собой кривизну балки. — Прим. ред.

Подставляя (17.9) в (17.5), получаем в качестве исходного уравнения соотношение

$$[N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{L^{(e)}} \left( \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^{(e)}]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0. \quad (17.10)$$

Первое слагаемое в интеграле (17.10) представляет собой матрицу коэффициентов элемента  $[k^{(e)}]$  в уравнении

$$[k^{(e)}] \{Y\} = \{f^{(e)}\}. \quad (17.11)$$

После суммирования по элементам второе слагаемое в интеграле (17.10) будет соответствовать вектор-столбцу  $\{F\}$ . Член вне интеграла в (17.10) вносит вклад в вектор-столбец  $\{F\}$  при условии, что производная  $dy/dx$  (наклон) определена на каждом конце элемента. Этот член не учитывается, если ничего не известно о наклоне в узловых точках.

Вычислим интегралы в (17.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [N]^T &= \frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [N] \{Y\} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix}, \\ \int_0^L \frac{d}{dx} [N]^T \frac{dy}{dx} dx &= \int_0^L \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} dx, \end{aligned}$$

или

$$\int_0^L \frac{d[N]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix}. \quad (17.12)$$

Верхний индекс  $(e)$  отброшен, так как рассматривается отдельный элемент. Интегрирование выполняется в пределах от нуля до  $L$ , так как функции формы в (17.7) выражены в местной системе координат с центром в  $i$ -м узле.  $L$  — длина элемента. Для второго интеграла имеем

$$\int_0^L [N]^T \frac{M}{EI} dx = \int_0^L [N]^T [N] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}. \quad (17.13)$$

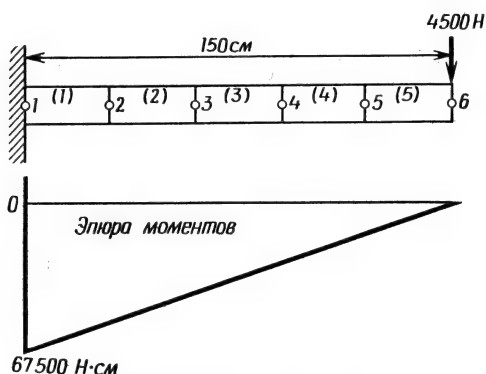
Применение полученных соотношений иллюстрируется на следующем примере.

## Пример

**170.** Консоль длиной 150 см жестко закреплена в точке  $x=0$  и подвержена действию сосредоточенной силы величиной 4500 Н на свободном конце. Изгибная жесткость сечения  $EI$  равна  $8,5 \cdot 10^8$  Н/см<sup>2</sup>. Требуется определить прогиб консоли в шести узловых точках, расположенных на равном расстоянии друг от друга.

Разбиение области на элементы, а также эпюра изгибающего момента показаны ниже. Значения величины  $M/EI$  в узлах даны в следующей таблице:

Узел	$M/EI$	Узел	$M/EI$
1	-0,000794	4	-0,000318
2	-0,000635	5	-0,000159
3	-0,000476	6	0,0



К задаче 170.  $EI = 8,5 \cdot 10^8$  Н·см<sup>2</sup>; длина каждого элемента 30 см.

Запишем уравнения, соответствующие первому элементу:

$$\frac{-1}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} - \frac{30}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Последний член в левой части уравнений исчезает, поскольку в точке  $x=0$  угол поворота равен нулю. Этот член не появляется в других уравнениях, потому что ничего не известно об угле по-

ворота ни в одной из других узловых точек. Коэффициенты в уравнениях для остальных элементов остаются теми же самыми, так как все элементы имеют одинаковую длину. В результате суммирования матриц элементов получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{Bmatrix} + 150 \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,000794 \\ -0,000635 \\ -0,000476 \\ -0,000318 \\ -0,000159 \\ 0,0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,33345 \\ 0,57155 \\ 0,42855 \\ 0,28605 \\ 0,14310 \\ 0,02385 \end{Bmatrix}.$$

Последняя система уравнений может быть решена без обращения матрицы, потому что  $Y_6=0$ . Из первого уравнения

$$Y_1 - Y_2 = 0,33345$$

получаем

$$Y_2 = -0,33345.$$

Второе уравнение теперь может быть решено относительно  $Y_3$ , третье — относительно  $Y_4$  и т. д. Таким образом, для  $Y$  могут быть записаны рекуррентные соотношения. Определяя  $n$  как глобальную степень свободы, будем иметь

$$-Y_{n-1} + 2Y_n - Y_{n+1} = F_n, \quad n \geq 2,$$

или

$$Y_{n+1} = 2Y_n - Y_{n-1} - F_n, \quad n \geq 2.$$

Окончательные значения прогибов в узловых точках даны ниже. Эти значения очень хорошо согласуются с теоретическими результатами.

Узел	Метод конечных элементов	Теоретические значения	Узел	Метод конечных элементов	Теоретические значения
1	0	0	4	-2,5719	-2,5729
2	-0,3334	-0,3335	5	-4,1929	-4,1929
3	-1,2385	-1,2388	6	-5,9550	-5,9559

В рассмотренной выше задаче были получены рекуррентные уравнения благодаря наличию граничных условий  $y(0)=0$  и  $y'(0)=0$  того же типа, что и в задаче Коши. Если граничные условия состоят в задании прогиба в двух или более точках, то линейная система уравнений должна быть решена с помощью процедуры, описанной в гл. 7. Последняя компонента вектора  $\{F\}$  не существенна для данного примера, потому что значение  $Y_6$  может быть определено из пятого уравнения. Шестое уравнение системы не будет выполняться, если в него подставить найденные числовые значения  $Y_5$  и  $Y_6$ . Это объясняется тем, что, решая задачу Коши, мы произвольно урезали область задания исходного дифференциального уравнения.

### 17.3. Двумерные уравнения теории поля

Ряд задач физики и техники может быть описан уравнением вида

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0. \quad (17.14)$$

В предыдущих главах это уравнение было использовано при решении задач о течении жидкости, переносе тепла и о кручении упругого стержня. Здесь уместно обсудить применение метода Галёркина к решению уравнения (17.14).

Подстановка (17.14) в (17.1) дает

$$\int_V [N]^T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q \right) dV = 0. \quad (17.15)$$

Прежде всего необходимо преобразовать (17.15) в уравнение, содержащее только первые производные по  $x$  и  $y$ . Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = [N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

можно записать

$$[N]^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (17.16)$$

Теперь первое слагаемое в объемном интеграле преобразуется к виду

$$\int_V [N]^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV - \int_V \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dV. \quad (17.17)$$

По теореме Остроградского — Гаусса имеем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV = \int_S [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} l_x dS. \quad (17.18)$$

Точно так же можно преобразовать интеграл

$$\int_V [N]^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dV.$$

Объединяя соотношения (17.17) и (17.18) с аналогичными соотношениями для приведенного выше интеграла и учитывая, что

$$dV = t dA \quad \text{и} \quad dS = t d\mathcal{L},$$

уравнение (17.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{L}} [N]^T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} l_y \right) d\mathcal{L} - \\ & - \int_A \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial [N]}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - [N]^T Q \right) dA = 0. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Здесь предполагается, что толщина элемента  $t$  равна единице.

Поверхностный интеграл в (17.19) может быть выражен через величину  $\partial \Phi / \partial n$ , где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dA - \int_A [N]^T Q dA - \\ & - \int_{\mathcal{L}} [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\mathcal{L} = 0. \end{aligned} \quad (17.20)$$

Первый интеграл в (17.20) вносит вклад в матрицу  $[k^{(e)}]$ , второй — в вектор  $\{f^{(e)}\}$  из уравнения  $[k^{(e)}] \{\Phi\} = \{f^{(e)}\}$ . Третий интеграл участвует в образовании обеих величин  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$ . Очевидно, если  $\partial \Phi / \partial n$  обращается в нуль на границе, то третий интеграл исчезает.

Неизвестная функция  $\Phi$  в уравнении (17.20) определяется соотношением

$$\Phi = [N] \{\Phi\},$$

так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N] \{\Phi\} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [N] \{\Phi\}.$$

Подставляя полученные формулы в первый интеграл (17.20), имеем

$$\int_A \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \{\Phi\},$$

что соответствует выражению

$$\int_A [B]^T [B] dA \{\Phi\} \quad (17.21)$$

для задач теории поля.

Третий интеграл в уравнении (17.20) заслуживает более детального рассмотрения, поскольку образует конвективную матрицу в задаче о переносе тепла. Предположим, что мы имеем ряд треугольных элементов вдоль вертикальной границы, как показано на фиг. 17.1 (эта граница выбрана только из соображений простоты), и хотим вычислить интеграл

$$\int_{\mathcal{L}} [N]^T \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\mathcal{L} \quad (17.22)$$

вдоль этой границы. Поток тепла вдоль границы соответствует тепловым потерям, вызванным конвективным теплообменом, и представляется величиной

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = h(\Phi_s - \Phi_\infty), \quad (17.23)$$

где  $\Phi_s$  — температура границы тела, а  $\Phi_\infty$  — температура окружающей среды.

Температура внутри элемента дается соотношением

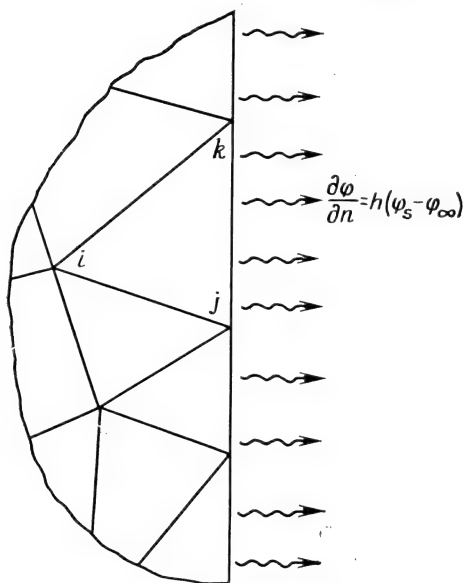
$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (17.24)$$

откуда имеем для точек поверхности

$$\Phi_s = 0\Phi_i + L_2\Phi_j + L_3\Phi_k, \quad (17.25)$$

так как вдоль рассматриваемой границы  $L_1=0$ . Теперь для теплового потока получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = h(\varphi_s - \varphi_\infty) = h[0 \quad L_2 \quad L_3] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} - h\varphi_\infty. \quad (17.26)$$



Фиг. 17.1. Поток тепла на границе элемента.

Подстановка (17.26) в (17.22) дает

$$\int_{\mathcal{L}} [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\mathcal{L} = h \int_{\mathcal{L}} [N]^T [N] \{\Phi\} d\mathcal{L} - \int_{\mathcal{L}} [N]^T h \varphi_\infty d\mathcal{L}, \quad (17.27)$$

где  $N = [0 \quad L_2 \quad L_3]$ . Выполняя интегрирование в (17.27) с помощью плоских  $L$ -координат, приходим к результатам, идентичным тем, что получены в гл. 8.

Использование метода Галёркина непосредственно приводит к слагаемым, которые в вариационной формулировке должны быть добавлены к функционалу, чтобы учесть граничные условия. Метод Галёркина применяется также при решении двумерных и трехмерных задач теории упругости [5]. В результате получается система уравнений, подобная той, которая соответствует вариационной формулировке этих задач.

## 17.4. Задача Коши

Метод Галёркина может быть использован при решении задачи Коши, а также при решении переходной задачи, обсуждавшейся в гл. 11. В этом разделе будет рассмотрена задача Коши для одного дифференциального уравнения, а затем проведено обобщение на случай системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0 \quad (17.28)$$

с начальными условиями  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 4$ . Это уравнение имеет очевидное решение

$$y = 4 \sin 2t.$$

Приближенное решение этого уравнения можно получить численно. Чтобы проиллюстрировать применение метода Галёркина, используем именно этот способ.

Подставляя (17.28) в (17.1), получаем

$$\int_0^t [N]^T \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y \right) dt = 0. \quad (17.29)$$

Мы уже указывали на необходимость разбиения интеграла на сумму и преобразования интеграла, содержащего производную высокого порядка, в интеграл от первой производной. Подобное преобразование уже рассматривалось по отношению к  $d^2 y/dx^2$ . Учитывая формулу (17.9), получаем

$$\int_{T_e} [N]^T \frac{d^2 y}{dt^2} dt = [N]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{T_i}^{T_j} - \int_{T_e} \frac{d[N]^T}{dt} \frac{dy}{dt} dt,$$

где  $T_e$  — шаг по времени (длина) отдельного элемента. Уравнение (17.29) может быть записано теперь в виде

$$-[N^{(1)}]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} - \sum_{e=1}^R \int_{T_i}^{T_j} \left( \frac{d[N^{(e)}]^T}{dt} \frac{dy}{dt} - 4 [N^{(e)}]^T y \right) dt = 0, \quad (17.30)$$

где  $T_i$  и  $T_j$  — значения времени, соответствующие узлам  $i$  и  $j$  элемента, а  $R$  — число элементов.

Применение формулы (17.30) будет проиллюстрировано с помощью линейного интерполяционного полинома для  $y$ :

$$y = [N^{(e)}] \{Y\} = \left[ \left( 1 - \frac{t}{T_e} \right) \frac{t}{T_e} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix}. \quad (17.31)$$

Соотношение (17.31) определено относительно местной системы координат с началом в  $i$ -м узле, что соответствует пределам интегрирования  $T_i=0$  и  $T_j=T_e$ . Подстановка выражения (17.31) в (17.30) дает

$$- [N^{(i)}]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} - \sum_{e=1}^E \int_0^{T_e} \left( \frac{d[N^{(e)}]^T}{dt} \frac{d[N^{(e)}]}{dt} \{Y\} - 4 [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{Y\} \right) dt = 0. \quad (17.32)$$

Для первого элемента получаем следующие уравнения:

$$-\begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (17.33)$$

Любому другому элементу соответствуют уравнения

$$-\frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (17.34)$$

так как во всех других узлах угол поворота не определен. Объединяя уравнения для отдельных элементов и предполагая длину элементов одинаковой, получаем

$$\begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} - \frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (17.35)$$

Заметим, что все уравнения, кроме первого, идентичны. Система уравнений (17.35) может быть записана в виде

$$-4 - \frac{1}{T_e} (Y_1 - Y_2) + \frac{4T_e}{6} (2Y_1 + Y_2) = 0, \quad (17.36a)$$

$$-\frac{1}{T_e} (-Y_{n-1} + 2Y_n - Y_{n+1}) + \frac{4T_e}{6} (Y_{n-1} + 4Y_n + Y_{n+1}) = 0, \quad n \geq 2, \quad (17.36b)$$

где  $n$  — произвольный узел. Зная  $T_e$ , из этих двух уравнений можно определить все значения  $\{Y\}$ .

## Пример

171. Требуется решить дифференциальное уравнение (17.28), считая шаг по времени равным  $1/16$  с. Начальные условия следующие:  $y(0)=0$  и  $y'(0)=4$ . Сравнить результаты расчетов с аналитическим решением.

Рекуррентные соотношения, соответствующие рассматриваемому уравнению, даны в (17.36). Заметим, что условие  $y(0)=0=Y_1$  позволяет решить уравнение (17.36a) относительно  $Y_2$ :

$$-4 - 16(-Y_2) + \frac{4}{6} \left( \frac{1}{16} \right) Y_2 = 0,$$

или

$$Y_2 = \frac{96}{385}.$$

Уравнение (17.36b) может быть решено относительно  $Y_{n+1}$ . Получаем соотношение

$$Y_{n+1} = \frac{764}{385} Y_n - Y_{n-1},$$

откуда находим

$$Y_3 = \frac{764}{385} Y_2 - Y_1 = \frac{764}{385} \cdot \frac{96}{385} - 0,$$

$$Y_3 = 0,4948.$$

Повторяя эту процедуру для каждого временного шага, вычисляем последовательно все узловые значения. Ниже приведены значения  $Y$ , полученные численным методом, а также значения, соответствующие точному решению.

$t$	Метод конечных элементов	Точное решение	$t$	Метод конечных элементов	Точное решение
0	0,0	0,0	$\frac{9}{16}$	1,8051	1,8045
$\frac{1}{16}$	0,2494	0,2493	$\frac{10}{16}$	1,8987	1,8980
$\frac{2}{16}$	0,4948	0,4948	$\frac{11}{16}$	1,9627	1,9618
$\frac{3}{16}$	0,7326	0,7325	$\frac{12}{16}$	1,9962	1,9950
$\frac{4}{16}$	0,9589	0,9589	$\frac{13}{16}$	1,9985	1,9971
$\frac{5}{16}$	1,1703	1,1702	$\frac{14}{16}$	1,9697	1,9680
$\frac{6}{16}$	1,3635	1,3633	$\frac{15}{16}$	1,9101	1,9082
$\frac{7}{16}$	1,5354	1,5351	$\frac{16}{16}$	1,8209	1,8186
$\frac{8}{16}$	1,6833	1,6829			

В случае использования метода Галёркина при решении задачи Коши получаются уравнения с двумя замечательными особенностями. Шаг по времени может изменяться, если в этом есть не-

обходимость; могут варьироваться и функции формы, входящие в  $[N^{(e)}]$ . В случае большой величины шага по времени можно использовать элементы высокого порядка.

Изменение шага по времени вызовет модификацию системы уравнений (17.35). Эта модификация будет выражаться в появлении более одной пары рекуррентных соотношений типа (17.36). Некоторые из этих соотношений будут включать как новые, так и старые приращения времени.

Если вместо линейного интерполирования (17.31) применить функции формы для квадратичного элемента, вместо двух будут получены три уравнения. Первые два уравнения используются для определения  $Y_2$  и  $Y_3$ . Третье соотношение рекуррентное, оно выражает последовательно одно из узловых значений через три предыдущих:

$$Y_{n+1} = f(Y_n, Y_{n-1}, Y_{n-2}).$$

Такая ситуация всегда возникает при решении задачи Коши с помощью метода Галёркина; всегда имеется достаточное число уравнений, чтобы можно было вычислить значения  $Y$ , требуемые для проведения вычислений по рекуррентным формулам.

## 17.5. Система дифференциальных уравнений первого порядка

Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$[C] \frac{d}{dt} \{\Phi\} + [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0 \quad (17.37)$$

обсуждалась в гл. 11, где было дано конечно-разностное решение этих уравнений. Теперь решим эту систему методом Галёркина. В результате для вычисления значений  $\{\Phi\}$  получим матричное уравнение, которое несколько отличается от уравнения (11.23).

Используя для интегрирования неизвестной величины  $\Phi$  линейную модель, можно записать

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(e)} &= N_i^{(e)} \Phi_{1i} + N_j^{(e)} \Phi_{1j}, \\ \Phi_2^{(e)} &= N_i^{(e)} \Phi_{2i} + N_j^{(e)} \Phi_{2j}, \\ &\vdots \\ \Phi_r^{(e)} &= N_i^{(e)} \Phi_{ri} + N_j^{(e)} \Phi_{rj}, \end{aligned} \quad (17.38)$$

где индексы  $i$  и  $j$  используются для обозначения двух узловых значений, разделенных во времени на величину шага длины  $T_e$ , а  $r$  обозначает общее число узлов. Соотношение (17.38) в матричном виде имеет вид

$$\{\Phi^{(e)}\} = N_i^{(e)} \{\Phi\}_i + N_j^{(e)} \{\Phi\}_j. \quad (17.39)$$

Здесь  $\{\Phi\}$  — матрица размера  $n \times 1$ , а  $N_i^{(e)}$  и  $N_j^{(e)}$  — функции формы. Подстановка выражения (17.39) в (17.1) дает два матричных уравнения:

$$\int_0^{T_e} N_i \left( [C] \frac{d\{\Phi\}}{dt} + [K] \{\Phi\} + \{F\} \right) dt = 0 \quad (17.40a)$$

и

$$\int_0^{T_e} N_j \left( [C] \frac{d\{\Phi\}}{dt} + [K] \{\Phi\} + \{F\} \right) dt = 0. \quad (17.40b)$$

Дифференцируя по времени соотношение (17.39), получаем

$$\frac{d\{\Phi\}}{dt} = \{\Phi\}_i - \frac{1}{T_e} \{\Phi\}_i + \frac{1}{T_e} \{\Phi\}_j. \quad (17.41)$$

Подставляя (17.41) и (17.38) в (17.40a) и выполняя интегрирование, имеем

$$-\frac{1}{2} [C] (\{\Phi\}_i - \{\Phi\}_j) + \frac{T_e}{6} [K] (2\{\Phi\}_i + \{\Phi\}_j) + \frac{1}{2} \{F\}_i = 0. \quad (17.42)$$

Преобразуя точно так же уравнение (17.40b), получаем

$$-\frac{1}{2} [C] (\{\Phi\}_i - \{\Phi\}_j) + \frac{T_e}{6} [K] (\{\Phi\}_i + 2\{\Phi\}_j) + \frac{1}{2} \{F\}_j = 0. \quad (17.43)$$

Последние два уравнения могут быть объединены в одно:

$$\begin{bmatrix} \left( -\frac{1}{2} [C] + \frac{T_e}{3} [K] \right) \left( \frac{1}{2} [C] + \frac{T_e}{6} [K] \right) \\ \left( -\frac{1}{2} [C] + \frac{T_e}{6} [K] \right) \left( \frac{1}{2} [C] + \frac{T_e}{3} [K] \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi\}_i \\ \{\Phi\}_j \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{F\}_i \\ \{F\}_j \end{Bmatrix} = 0. \quad (17.44)$$

Это уравнение для элемента, соответствующее одному шагу по времени. Для получения системы уравнений, определяющей значения  $\{\Phi\}_1$ ,  $\{\Phi\}_2$  и  $\{\Phi\}_3$ , ..., оно должно быть объединено с аналогичными уравнениями для соседних временных шагов. Пусть всем элементам соответствуют одни и те же приращения времени; объединяя уравнения для первых двух шагов по времени, по-

лучим

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{3}[K]\right) & \left(\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) & 0 \\ \left(-\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) & \left(\frac{2T_e}{3}[K]\right) & \left(\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) \\ \left(-\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) & \left(\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{3}[K]\right) & \left(-\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} \{\Phi\}_1 \\ \{\Phi\}_2 \\ \{\Phi\}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\{F\}_1 \\ \{F\}_2 \\ \{F\}_3 \end{Bmatrix}. \quad (17.45)$$

Так как  $\{\Phi\}_1$  известно, то первое уравнение в (17.45) можно использовать для вычисления  $\{\Phi\}_2$ . Все остальные уравнения, начиная со второго, идентичны между собой и могут быть записаны в общей форме:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) \{\Phi\}_{n-1} + \frac{2T_e}{3}[K] \{\Phi\}_n + \\ + \left(\frac{1}{2}[C] + \frac{T_e}{6}[K]\right) \{\Phi\}_{n+1} = -\{F\}_n, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (17.46)$$

Это соотношение позволяет вычислить все требуемые значения  $\{\Phi\}_n$  для любого  $n$  больше двух.

При использовании формулы (17.46) следует иметь в виду две особенности, которые отличают ее от результатов, полученных разностным методом. Для вычисления  $\{\Phi\}_{n+1}$  необходимо знать два вектор-столбца  $\{\Phi\}_{n-1}$  и  $\{\Phi\}_n$ , а кроме того, требуется помнить три матрицы размера  $[C]$ . Последнее требование приводит к значительному загрузению машинной памяти и представляет определенный недостаток при решении систем большого порядка.

Для реализации метода Галёркина во временной области можно применить другую процедуру: рассматривая шаг по времени как отдельный элемент, вычислить  $\{\Phi\}_j$ , используя  $\{\Phi\}_i$ . При этом вектор-столбец  $\{\Phi\}_j$  может быть найден либо из уравнения (17.42), либо из (17.43). Уравнение (17.43), видимо, более широко применяется, хотя (17.42) будет давать для  $\{\Phi\}_j$  значения, почти идентичные тем, что получаются с помощью (17.43).

Как показано в работе [1], использование уравнения (17.43) дает для  $\{\Phi\}_j$  значения, которые меньше осциллируют, чем в случае решения исходной системы (17.37) разностным методом, рассмотренным в гл. 11.

Вектор  $\{F\}$  в (17.37) может изменяться со временем. В этом случае его нужно вычислять для каждого временного шага и уравнения (17.42) и (17.43) должны быть видоизменены.

## 17.6. Заключение

Сочетание метода Галёркина с кусочной аппроксимацией метода конечных элементов является чрезвычайно эффективным способом решения многих дифференциальных уравнений. Несколько примеров, связанных с техническими расчетами, были обсуждены в этой главе. Метод Галёркина, безусловно, получит широкое распространение благодаря тому, что он позволяет обходиться без вариационной формулировки задачи.

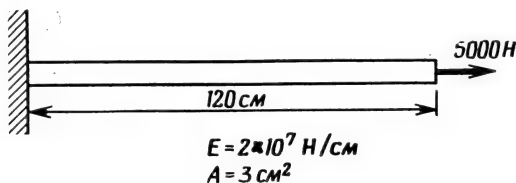
## Задачи

172. При осевом нагружении некоторого элемента конструкции его перемещения описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{du}{dx} - \frac{P}{AE} = 0,$$

где  $u$  — перемещение, см;  $P$  — осевая нагрузка, Н;  $A$  — площадь сечения, см<sup>2</sup>;  $E$  — модуль упругости, Н/см<sup>2</sup>. Получите матрицы элемента для этого дифференциального уравнения, считая величину  $P/AE$  постоянной.

173. С помощью матриц элемента, полученных в задаче 172, вычислите узловые перемещения для детали конструкции, изображенной ниже. Используйте два элемента равной длины.



К задаче 173.

174. Определите матрицы элемента для дифференциального уравнения в задаче 172, если величина  $P/AE$  меняется линейно от одного узла до другого. Используйте результаты решения задачи 108, рассмотренной в гл. 12.

175. Выведите уравнения для элемента, соответствующие дифференциальному уравнению (17.28). Используйте элемент с тремя узлами (квадратичный). С помощью выведенных уравнений решите исходную задачу Коши для интервала  $0 \leq t \leq 1$ .

176. Используя линейный интерполяционный полином, получите уравнения для элемента, соответствующие дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} + ay + b = 0,$$

где  $a$  и  $b$  — заданные константы, а  $y(0)$  известно.

177. Используя результаты, полученные в задаче 176, решите одно из следующих дифференциальных уравнений. Сравните результаты с теми, что дает аналитическое решение.

а)  $y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;

б)  $y' - 4y + 2 = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;

в)  $y' + 2y - 1 = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $0 \leq t \leq 1/2$ ;

г)  $y' - 6y - 6 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

178. Решите задачу 176, применяя следующие элементы:

а) квадратичный интерполяционный полином; б) кубичный интерполяционный полином. Решите одно из уравнений в задаче 177.

179. Выведите уравнения для элемента, соответствующие дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by + c = 0,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — заданные константы. Для  $y$  используйте линейный интерполяционный полином.

180. Используя результаты, полученные в задаче 179, решите следующие уравнения:

а)  $y'' - 3y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ ,  $0 \leq t \leq 1/2$ ;

б)  $y'' - 2y + 1 = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1/2$ ;

в)  $y'' + y' - 6 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ,  $0 \leq t \leq 1/2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Donea J., On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 103—110 (1974).
2. Martin H. C., Carey G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, N. Y., 1973.
3. Norrie D. H., deVries G., The Finite Element Method, Academic Press, N. Y., 1973.
4. Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, 2-nd ed., McGraw-Hill, N. Y., 1956.
5. Szabo B. A., Lee G. C., Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1, 301—310 (1969).
6. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971; есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Глава 18

### УЧЕБНЫЕ ПРОГРАММЫ

Во всех предыдущих главах подчеркивалась необходимость машинной реализации метода конечных элементов. Очевидно, что метод конечных элементов не пригоден для проведения расчетов вручную. В этой главе будут рассмотрены некоторые программы, которыми следует пользоваться при изучении материала, представленного в гл. 2, 6 и 8—12. Настоящая глава не должна рассматриваться как последняя глава этой книги. Изложенный здесь материал нужно использовать в качестве приложения при обсуждении конкретных применений метода конечных элементов.

Программы, приведенные в этой главе, далеки от тех сложных программ, которые могут решать самые различные задачи. Они не предназначены для того, чтобы конкурировать с имеющимися стандартными программами. Эти программы преследуют только учебные цели. Такие несложные программы весьма желательны с учебной точки зрения, так как они сокращают до минимума классное время, требуемое для объяснения ее работы. Перечислим некоторые характерные особенности, которые приводят к упрощениям в программе:

1. Используются элементы только одного типа — линейные треугольники.

2. При разбиении области на элементы характеристики материала каждого элемента предполагаются одинаковыми.

3. Главные оси инерции параллельны координатным осям  $x, y$ .

4. Каждая программа решает только однотипные задачи, например задачу о кручении упругого стержня, двумерный случай переноса тепла, двумерные течения жидкости или двумерные задачи теории упругости.

5. Редко встречающиеся варианты счета исключаются.

6. Программы мало отличаются между собой в отношении требуемых исходных данных и организации их ввода.

Даже в том случае, когда разнообразие вариантов счета в программе сведено к минимуму, методика программирования включает такие характеристики, которые делают эффективным использование этих вариантов. Все коэффициенты системы уравнений  $[K]\{\Phi\} = \{F\}$  хранятся в машинной памяти в виде отдельного вектор-столбца. Такой способ исключает необходимость заранее проставлять размеры отдельных компонент  $[K]$ ,  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$  и зна-

чительно сокращает число ошибок, совершаемых неопытными пользователями.

Относительное расположение  $[K]$ ,  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$  в указанном вектор-столбце показано на фиг. 18.1. В программах учтено также, что результирующая алгебраическая система уравнений имеет матри-

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \{\Phi\} \\ \{F\} \\ [K] \end{matrix} \right\}$$

Фиг. 18.1. Относительное расположение  $[K]$ ,  $\{\Phi\}$  и  $\{F\}$  в вектор-столбце.

цу ленточного типа, поэтому в эту главу включен ряд подпрограмм, выполняющих различные операции над матрицей  $[K]$ .

Каждая программа построена на основе блок-схемы, представленной в гл. 7. Специальные программы, включающие некоторые модификации, обсуждаются в связи с каждой прикладной темой. Ввод исходных данных для элементов осуществляется в том же формате, в каком эти данные перфорируются программой GRID после завершения ее работы. Это позволяет исключить еще один источник ошибок при формировании исходных данных.

Представленные здесь программы написаны для ЭВМ с минимальными запоминающими устройствами. Исходные данные элементов не хранятся в машинной памяти, а вводятся вновь, если необходимо вычислить результаты элемента. Тот, кто имеет дело с ЭВМ, обладающей большим по объему запоминающим устройством, может считать более удобным хранить информацию об элементах в машинной памяти.

Написать программу можно несколькими способами. Эта глава содержит только те программы, которые являются результатом работы самого автора по созданию ряда учебных программ, основанных на методе конечных элементов. Каждый пользователь может по желанию модифицировать эти программы в соответствии с его учебными или исследовательскими целями, а также с учетом возможностей ЭВМ.

Следующие программы написаны на алгоритмическом языке ФОРТРАН IV [2].

## 18.1. GRID

Неверно составленные исходные данные для элементов — главный источник ошибок при использовании программ, основанных на методе конечных элементов. Обработка исходных данных также требует затрат времени. Существуют программы, которые ав-

томатически вырабатывают исходные данные элементов. Эти программы построены на различных принципах, но все они служат одной цели: размещают узловые точки внутри рассматриваемой области и затем разбивают область на элементы. Окончательным результатом их работы является вывод на перфорацию номеров узлов элементов и координат этих узлов.

Программа GRID вырабатывает исходные данные элементов для представленных в этой главе программ, основанных на методе конечных элементов. Для конструирования дискретной модели рассматриваемого тела в GRID используется семейство четырехугольных зон с восемью узлами (квадратичные четырехугольники). Эта программа может моделировать двумерные области, которые состояются из прямоугольников и треугольников, границы которых могут быть описаны кривыми второго порядка. В программе осуществляется нумерация узлов элементов и вычисляется величина  $(R+1)$ , используемая для определения ширины полосы ленточной матрицы. Не пытайтесь минимизировать  $R$  за счет перенумерации узлов.

Минимизация ширины полосы ленточной матрицы и связанные с этим программы обсуждаются в работе [1].

#### 18.1.1. Четырехугольная зона

В программе GRID для предварительного разбиения на зоны могут применяться только квадратичные четырехугольники. Этот элемент, однако, обладает значительной гибкостью: может использоваться в качестве прямоугольника, четырехугольника общего вида или треугольника (фиг. 18.2). В последнем случае две стороны четырехугольника используются для задания одной стороны треугольной зоны.

Восемь узлов, определяющих зону, нумеруются, как показано на фиг. 18.2. Узлу 1 всегда соответствуют координаты  $\xi=\eta=-1$ . Заметим, что один из угловых узлов (узел 5 на фиг. 18.2) всегда будет на гипотенузе треугольной зоны.

При рассмотрении каждой четырехугольной зоны выполняются пять основных операций:

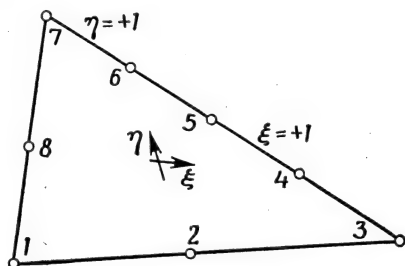
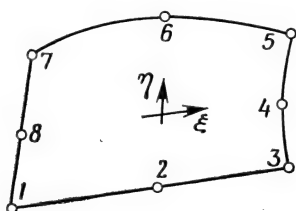
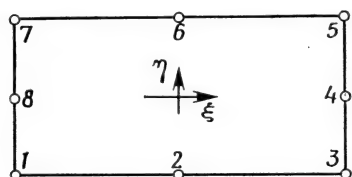
1. Согласно введенным исходным данным, определяется число строк и столбцов узлов.

2. Делается проверка, нет ли среди граничных узлов таких, которые уже были пронумерованы ранее. Если такие узлы есть, то за ними сохраняются номера, которые им были приписаны раньше.

3. Узлы нумеруются последовательно, начиная от точки с координатами  $\xi=-1$ ,  $\eta=+1$  и двигаясь слева направо (при изменении  $\xi$  от  $-1$  до  $+1$ ) и сверху вниз (при изменении  $\eta$  от  $+1$  до  $-1$ ). Все узлы, пронумерованные раньше, пропускаются.

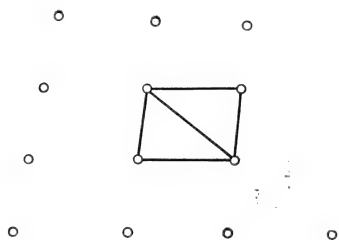
4. Номера всех граничных узлов сохраняются для последующих рассмотрений соседних зон.

5. Зона делится на треугольные элементы. Каждому элементу приписывается определенный номер. Вычисляется величина  $(R+1)$ , которая сравнивается с наибольшим значением  $(R+1)$ , полученным в предыдущих расчетах.

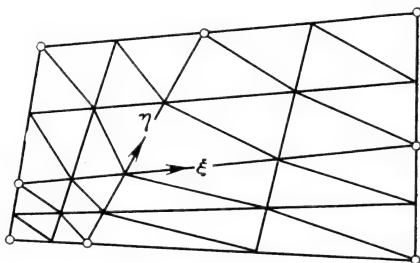


Фиг. 18.2. Зоны, которые могут рассматриваться как четырехугольник.

Разбиение зоны на треугольные элементы осуществляется следующим образом. Рассматриваются четыре узла, которые образуют четырехугольник, как показано на фиг. 18.3. Вычисляются и



Фиг. 18.3. Совокупность четырех узлов, образующих два треугольных элемента.



Фиг. 18.4. Изменение размеров элементов при разбиении области.

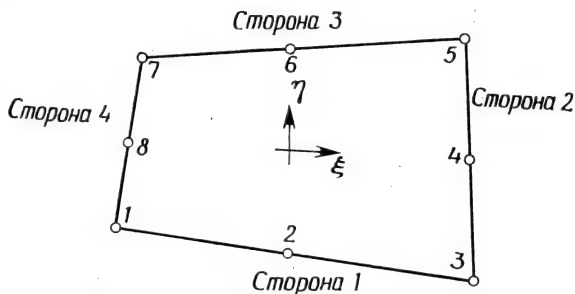
сравниваются длины двух его диагоналей, после чего четырехугольный элемент делится с помощью короткой диагонали на два треугольных элемента. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут рассмотрены все множества, состоящие из соседних четырех узлов.

Размеры элементов можно варьировать, смещая узлы 2, 4, 6 или 8 относительно середин соответствующих сторон зоны. Сдвиг этих узлов означает перемещение начала местной системы координат и приводит к разбиению, подобному тому, которое представлено на фиг. 18.4. Заметим, что координаты узлов, о которых идет речь, должны оставаться внутри интервалов  $-1/2 < \xi < 1/2$  или  $-1/2 < \eta < 1/2$  [3].

### 18.1.2. Составная область

Дискретная модель тела обычно конструируется с использованием нескольких четырехугольных зон, имеющих одну или несколько общих сторон. Наличие общей границы между двумя зонами требует задания некоторой дополнительной информации с тем, чтобы можно было приписывать узлам, расположенным вдоль общей границы, одни и те же номера независимо от того, какая рассматривается зона. Вводимую для этой цели информацию будем называть «исходными данными соединения». Эти данные указывают ЭВМ, как рассматриваемая зона соединяется с другими зонами.

Данные соединения для отдельной зоны состоят из четырех чисел, представляющих собой номера каждой из ее сторон. Стороны четырехугольника пронумерованы так, как показано на фиг. 18.5: первая сторона расположена между узлами 1 и 3, вторая — между узлами 3 и 5 и т. д.

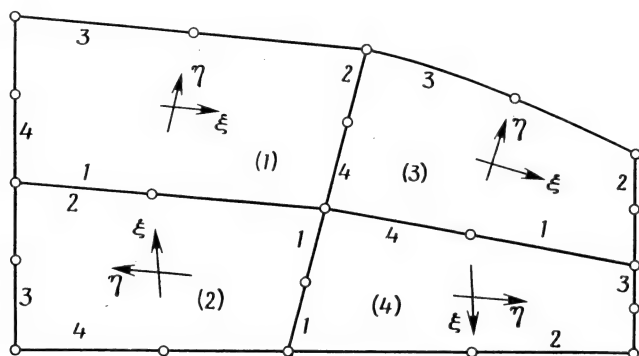


Фиг. 18.5. Стороны четырехугольной зоны.

Составление данных соединения, вероятно, лучше всего проиллюстрировать на примере области, состоящей из четырех зон, как показано на фиг. 18.6.

Введем местную систему координат  $\xi\eta$  и номер зоны. Нумерация зон совершенно произвольна. Система координат  $\xi\eta$  обычно ориентируется так, чтобы получалась наименьшая ширина полосы ленточной матрицы жесткости. Правда, ориентация осей координат

нат, выбранная на фиг. 18.6, не обеспечивает это, поскольку здесь преследуется цель — проиллюстрировать составление исходных данных соединения. Сторонам каждой зоны соответствуют числа 1—4.



Фиг. 18.6. Тело, составленное из четырех зон в виде четырехугольников.

Данные соединения для области, составленной из четырех зон (фиг. 18.6), сведены в следующую таблицу:

Зона	Сторона			
	1	2	3	4
1	2	3	0	0
2	4	1	0	0
3	4	0	0	1
4	2	0	0	3

Первая строка данных устанавливает, что сторона 1 зоны 1 соединяет ее с зоной 2, а сторона 2 зоны 1 соединяет ее с зоной 3. Два нулевых значения строки означают, что вдоль сторон 3 и 4 зона 1 не соединяется ни с какими другими зонами. Каждой зоне соответствует своя строка исходных данных.

### 18.1.3. Пояснения к программе

Входные данные для программы GRID могут быть разбиты на пять групп: титульная карта, карта с параметрами программы,  $x$ - и  $y$ -координаты узлов, определяющих четырехугольные зоны, данные соединения и данные зоны.

Титульная карта (13-я строка листинга программы) содержит текст утверждения, которое печатается в верхней части страницы выдачи с целью идентификации.

Карта параметров программы (15-я строка) содержит три величины формата (313):

INRG	Число зон	
INBP	Число граничных точек	
IPCH	Управление перфорацией	0 означает, что исходные данные элемента не перфорируются, 1 означает перфорирование исходных данных элемента

Считывание  $x$ - и  $y$ -координат происходит раздельно (строки 17 и 18). Сначала вводятся все  $x$ -координаты, а затем — все  $y$ -координаты. Данные соединения считываются (строка 21) вслед за координатами. Идентификатор NRG используется для обозначения номера зоны, а данные соединения хранятся в массиве с идентификатором JT.

Данные зоны считываются в строке 38. Эти исходные данные следующие:

NRG	Номер зоны
NROWS	Число строк узлов
NCOL	Число столбцов узлов
NDN	Глобальные номера узлов, определяющих четырехугольник

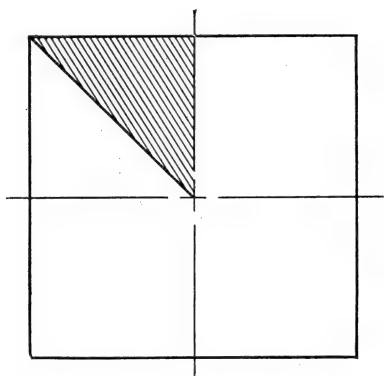
Восемь значений NDN должны быть подготовлены для формата (1113) в строке 39. Основные части программы разделяются картами с комментариями. Приведем обозначения некоторых других важных переменных:

N	Восемь функций формы для квадратичного четырехугольника
XC	} $x$ - и $y$ -координаты узлов зоны
YC	
NN	Номера узлов зоны
NNRB	Номера узлов, расположенных на границе области. Это трехмерный массив, определяемый как NNRB (зона, сторона, номер узла)
XE, YE, NE	$x$ - и $y$ -координаты и номера узлов элементарного четырехугольника с четырьмя узлами, который делится на два треугольника.

Последовательность операторов, представленных в строках 162—169, определяет величину  $(R+1)$ , используемую при вычислении ширины полосы ленточной матрицы.

### 18.1.4. Пример

Чтобы проиллюстрировать подготовку исходных данных для программы GRID, рассмотрим задачу о кручении упругого стержня с поперечным сечением в форме квадрата. Исходная область анализа показана на фиг. 18.7. Как следует из теоретического рассмотрения задачи, максимальное сдвиговое напряжение наблюдается на границе области в середине стороны квадрата. Эта точка соответствует вершине угла в  $90^\circ$  на фиг. 18.7. При приближении к центру сечения стержня сдвиговое напряжение уменьшается до нуля. Наличие градиента сдвигового напряжения указывает на то, что мы должны проводить разбиение на элементы таким образом, чтобы наименьшие по размерам элементы встречались вблизи прямого угла.

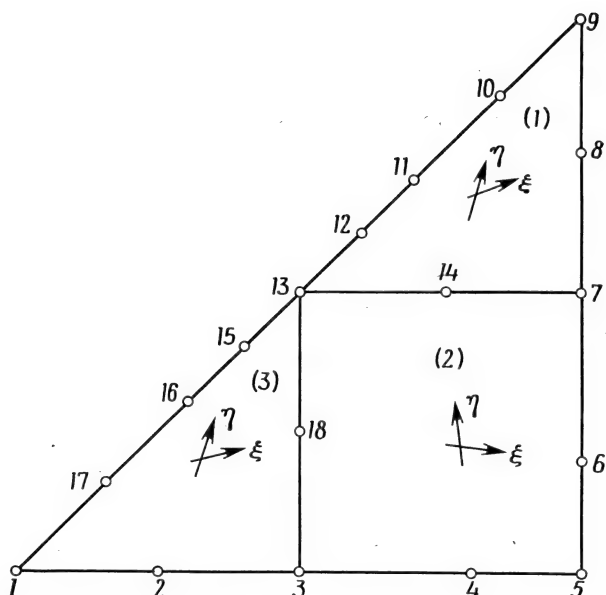


Фиг. 18.7. Область анализа в задаче о кручении стержня квадратного сечения.

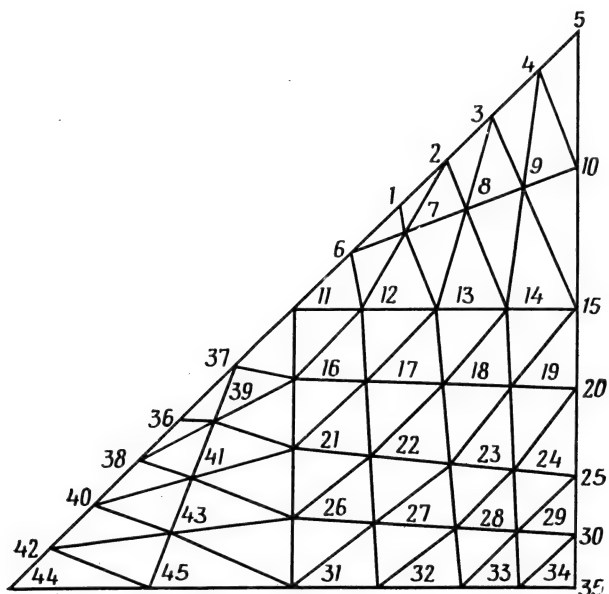
Исходная треугольная область разбивается предварительно на одну четырехугольную и две треугольные зоны (подобласти), как показано на фиг. 18.8. Узлы, используемые для задания четырехугольных зон, нумеруются произвольно. Узлы 4 и 6 расположим несколько ближе к узлу 5 с тем, чтобы получить наименьшие элементы вблизи прямого угла. Для разбиения второй зоны на элементарные четырехугольники выберем пять строк и пять столбцов. Такой выбор фиксирует число столбцов (пять) в первой зоне и число строк (пять) в третьей зоне, поскольку число узлов вдоль общих границ различных зон должно быть одинаковым. Самые крупные элементы будут получаться в первой и третьей зонах, так как первая зона содержит только три строки узлов, а третья зона содержит только три столбца узлов.

В табл. 18.1 представлены соответствующие рассматриваемой области исходные данные для программы вместе с пояснительным текстом к каждой группе карт. Имеются карта данных соединения и общая карта данных для каждой зоны.

Окончательное разбиение на элементы и номера узлов показаны на фиг. 18.9. Использование здесь расположение зон приводит к наименьшему для величины  $(R+1)$  значению среди тех, которые можно получить с помощью программы GRID. Для достижения минимального значения  $(R+1)$  следует придерживаться общего эмпирического правила: начинать с самой верхней зоны и затем двигаться вниз и направо.



Фиг. 18.8. Предварительное разбиение области на зоны, используемое для генерирования исходных данных элементов.



Фиг. 18.9. Разбиение области в виде треугольника на элементы.

### Входные данные программы GRID

[illegible]

ELEMENT	GENERATION	FOR	TORSION	PROBLEM	
---------	------------	-----	---------	---------	--

*Титульная карта*

	3	1	8		1
--	---	---	---	--	---

*Карта параметров программы* $x$  - координаты[illegible]

*у-координаты*

[illegible]

	1	2	0	0	0					
	2	0	0	1	3					
	3	0	2	0	0					

### Данные соединения

1	3	5	13	14	7	8	9	10	11	12									
2	5	5	3	4	5	6	7	14	13	18									
3	5	3	1	2	3	18	13	15	16	17									

*Карта данных для каждой зоны*

```

PROGRAM GRID(INPUT,OUTPUT,PUNCH,TAPE60=INPUT,TAPE61=OUTPUT,TAPE62=
1 PUNCH)
DIMENSION TITLE(18),XP(100),YP(100),XRG(9),YRG(9),N(8),NON(8)
DIMENSION NN(21,21),YC(21,21),XC(21,21),NNRB(20,4,21),JT(20,4)
5 DIMENSION LB(3),NE(400),XE(400),YE(400),NR(4),ICOMP(4,4)
REAL N
DATA ICOMP/-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,-1/
DATA IN/60/,IO/61/,IP/62/,NBW/0/,NB/0/,NEL/0/
C *****
10 C INPUT AND OUTPUT OF TITLE, CONTROL CARD, GLOBAL COORDINATES AND
C CONNECTIVITY DATA
C *****
17 READ(IN,17) TITLE
17 FORMAT(1A8)
17 READ(IN,1) INRG,INBP,IPCH
17 FORMAT(3I3)
17 READ(IN,3) (XP(I),I=1,INBP)
17 READ(IN,3) (YP(I),I=1,INBP)
20 3, FORMAT(8F10,5)
DO21=1,INRG
2 READ(IN,8) NRG,(JT(NRG,J),J=1,4)
8 FORMAT(5I3)
WRITE(IO,36) TITLE
36 FORMAT(1H1////1X,10A8//1X,18HGLOBAL COORDINATES //1X,30HNUMBER
25 1 X COORD Y COORD )
WRITE(IO,30) (I,XP(I),YP(I),I=1,INBP)
30 FORMAT(2X,I3,7X,F7.2,5X,F7.2)
WRITE(IO,21)
30 21 FORMAT(//1X,17HCONNECTIVITY DATA//1X,41HREGION SIDE 1 2
1 3 4 )
DO26=1,INRG
26 WRITE(IO,22) I,(JT(I,J),J=1,4)
22 FORMAT(2X,I3,14X,4(I2,5X))
C *****
35 C LOOP ON THE REGIONS TO GENERATE THE ELEMENTS
C *****
DO16KK=1,INRG
READ(IN,4) NRG,NROWS,NCOL,NON
40 4 FORMAT(11I3)
WRITE(IO,18) NRG,NROWS,NCOL,(NON(I),I=1,8)
18 FORMAT(1H1////1X,12H** REGION **//10X,I2,5H ROWS,10X,I2
1,8H COLUMNS//10X,21HBOUNDARY NODE NUMBERS,10X,8I5)
C *****
45 C GENERATION OF THE ELEMENT NODAL COORDINATES
C *****
DO5I=1,8
II=NON(I)
XRG(I)=XP(II)
5 YRG(I)=YP(II)
XRG(9)=XRG(I)
YRG(9)=YRG(I)
TR=NROWS-1
DETA=2./TR
TR=NCOL-1
DSI=2./TR
DO12I=1,NROWS
TR=I-1
ETA=1.-TR*DETA
DO12J=1,NCOL
TR=J-1
SI=-1.+TR*DSI
N(1)=-0.25*(1.-SI)*(1.-ETA)*(SI+ETA+1.)
N(2)=0.50*(1.-SI**2)*(1.-ETA)
N(3)=0.25*(1.+SI)*(1.-ETA)*(SI-ETA-1.)
65 N(4)=0.50*(1.+SI)*(1.-ETA**2)
N(5)=0.25*(1.+SI)*(1.+ETA)*(SI+ETA-1.)
N(6)=0.50*(1.-SI**2)*(1.+ETA)
N(7)=0.25*(1.-SI)*(1.+ETA)*(ETA-SI-1.)
N(8)=0.50*(1.-SI)*(1.-ETA**2)
XC(I,J)=0.0
YC(I,J)=0.0
DO12K=1,8
XC(I,J)=XC(I,J)+XRG(K)*N(K)
75 YC(I,J)=YC(I,J)+YRG(K)*N(K)
C *****
C GENERATION OF THE REGION NODE NUMBERS
C *****
KN1=1
KS1=1
KN2=NROWS
KS2=NCOL
DO50I=1,4
NRT=JT(NRG,I)
IF(NRT.EQ.0.OR.NRT.GT.NRG) GO5050
85 DO56J=1,4
IF(JT(NRT,J).EQ.NRG) NRTS=J
56 K=NCOL
IF(I.EQ.2.OR.I.EQ.4) K=NROWS
JL=1
JK=ICOMP(I,NRTS)
IF(JK.EQ.-1) JL=K
DO44J=1,K

```

```

95      GO TO(45,46,47,48),I
      45 NN(NROWS,J)=NNRB(NRT,NRTS,JL)
      KN2=NROWS-1
      GOTO44
      46 NN(I,NCOL)=NNRB(NRT,NRTS,JL)
      KS2=NCOL-1
      GOTO44
100     47 NN(1,J)=NNRB(NRT,NRTS,JL)
      KN1=2
      GOTO44
      48 NN(J,1)=NNRB(NRT,NRTS,JL)
      KS1=2
105     44 JL=JL+JK
      50 CONTINUE
      IF(KN1.GT.KN2) GOTO105
      IF(KS1.GT.KS2) GOTO105
      DO10 I=KN1,KN2
      DO10 J=KS1,KS2
110     NB=NB+1
      10 NN(I,J)=NB
C
115     STORAGE OF THE BOUNDARY NODE NUMBERS
      DO42 I=1,NCOL
      NNRB(NRG,1,I)=NN(NROWS,I)
      42 NNRB(NRG,3,I)=NN(1,I)
      DO43 I=1,NROWS
      NNRB(NRG,2,I)=NN(I,NCOL)
120     43 NNRB(NRG,4,I)=NN(I,1)
C
      OUTPUT OF THE REGION NODE NUMBERS
125     WRITE(IO,49)
      49 FORMAT(/,1X,19HREGION NODE NUMBERS/)
      DO52 I=1,NROWS
      52 WRITE(IO,53) (NN(I,J),J=1,NCOL)
      53 FORMAT(1X,20I5)
130     C
      DIVISION INTO TRIANGULAR ELEMENTS
105     WRITE(IO,55)
      55 FORMAT(/,3X,17HNEL NODE NUMBERS,9X,4HX(1),8X,4HY(1),8X,4HX(2),8X,
135     14HY(2),8X,4HX(3),8X,4HY(3))
      K=1
      DO54 I=1,NROWS
      DO54 J=1,NCOL
      XE(K)=XC(I,J)
      YE(K)=YC(I,J)
      NE(K)=NN(I,J)
140     54 K=K+1
      L=NROWS-1
      DO15 I=1,L
      DO15 J=2,NCOL
      DIAG1=SQRT((XC(I,J)-XC(I+1,J-1))**2+(YC(I,J)-YC(I+1,J-1))**2)
      DIAG2=SQRT((XC(I+1,J)-XC(I,J-1))**2+(YC(I+1,J)-YC(I,J-1))**2)
      NR(1)=NCOL*I+J-1
150     NR(2)=NCOL*I+J
      NR(3)=NCOL*(I-1)+J
      NR(4)=NCOL*(I-1)+J-1
      DO15 IJ=1,2
      NEL=NEL+1
      IF((DIAG1/DIAG2).GT.1.02) GOTO41
155     J1=NR(1)
      J2=NR(IJ+1)
      J3=NR(IJ+2)
      GOTO40
      41 J1=NR(IJ)
      J2=NR(IJ+1)
      J3=NR(IJ)
      40 LB(1)=IABS(NE(J1)-NE(J2))+1
      LB(2)=IABS(NE(J2)-NE(J3))+1
      LB(3)=IABS(NE(J1)-NE(J3))+1
165     DO107 IK=1,3
      IF(LB(IK).LE.NBW) GOTO107
      NBW=LB(IK)
      NELB=NEL
170     107 CONTINUE
      WRITE(IO,301) NEL,NE(J1),NE(J2),NE(J3),XE(J1),YE(J1),XE(J2),YE(J2)
      1,XE(J3),YE(J3)
      301 FORMAT(1X,4I5,3X,6F12.4)
      IF(TPCHEQ.0) GOTO15
      WRITE(IP,303) NEL,NE(J1),NE(J2),NE(J3),XE(J1),YE(J1),XE(J2),YE(J2)
175     1,XE(J3),YE(J3)
      303 FORMAT(4I3,6F10.4)
      15 CONTINUE
      16 CONTINUE
      WRITE(IO,51) NBW,NELB
180     51 FORMAT(/,1X,21HBANDWIDTH QUANTITY IS,D4,22H CALCULATED IN ELEMENT
      1,
      STOP
      END

```

## 18.2. Подпрограммы для ленточной матрицы

Матрица коэффициентов  $[K]$  в уравнении  $[K]\{\Phi\}=\{F\}$  является ленточной матрицей, и эффективные программы хранят ее в машинной памяти в виде прямоугольного массива вместо квадратного. Такой способ запоминания  $[K]$  приводит к необходимости составления ряда подпрограмм, которые выполняют умножение матрицы  $[K]$  на другие матрицы, модифицирование, разложение матрицы и решают соответствующую систему уравнений. Набор подпрограмм, которые выполняют указанные операции, представлен и обсуждается в этом разделе. Все эти подпрограммы используются с программами, данными в разд. 18.4—18.8.

### 18.2.1. BDYVAL

Подпрограмма BDYVAL считывает заданные значения компонент  $\{F\}$  и  $\{\Phi\}$  и модифицирует  $[K]$ , используя процедуру вычеркивания соответствующих строк и столбцов, обсужденную в гл. 7. Ввод заданных значений следует формату из шести целых чисел, двух интервалов и шести чисел с плавающей запятой (6I3, 2X, 6F10.4). Шесть чисел с плавающей запятой соответствуют по порядку шести целым числам, которые представляют собой заданные глобальные степени свободы. Считывание данных в этом формате повторяется до тех пор, пока не встретится нулевое или отрицательное значение глобальной степени свободы. Варианты входных данных показаны в примерах, связанных с конкретными областями применения.

### 18.2.2. DCMPCD и SLVBD

Подпрограмма DCMPCD преобразует ленточную матрицу  $[K]$  в верхнюю треугольную матрицу, используя процедуру гауссовского метода исключения, обсужденную в гл. 7. Подпрограмма SLVBD связана со вторым этапом решения системы уравнений; она используется совместно с подпрограммой DCMPCD для получения решения системы  $[K]\{\Phi\}=\{F\}$ . Подпрограмма SLVBD прежде всего разлагает вектор  $\{F\}$ , а затем вычисляет методом обратной прогонки значения компонент вектора  $\{\Phi\}$ . Кроме того, подпрограмма SLVBD осуществляет вывод искомых величин на печать. Значения компонент вектора  $\{\Phi\}$ , соответствующие каждому варианту нагрузки, выводятся на печать, если целочисленная переменная ID равна нулю.

### 18.2.3. MULTBD

Подпрограмма MULTBD выполняет умножение ленточной матрицы  $[K]$  на прямоугольный массив  $[F]$ . В обозначениях переменных, используемых в данной программе, это произведение за-

```

SUBROUTINE BDYVAL(GSM,GF,NP,NBW,NCL)
DIMENSION GSM(NP,NBW),GF(NP,NCL),IB(6),BV(6)
COMMON/TLE/TITLE(20)
DATA IN/60, IO/61/
WRITE(IO,200) TITLE
5 200 FORMAT(1H1,////////,1X,20A4)
C*****
C INPUT OF THE NODAL FORCE VALUES
C*****
10 201 FORMAT(/1X,15HBOUNDARY VALUES//1X,12HNODAL FORCES)
DO216JM=1,NCL
IO1=0
INK=0
15 202 READ(IN,203) IB,BV
203 FORMAT(6I3,2X,6F10.5)
IO=0
DO204L=1,6
IF(IB(L).LE.0) GOTO205
20 IO=IO+1
I=IB(L)
204 GF(I,JM)=BV(L)+GF(I,JM)
GOTO206
205 INK=1
IF(IO.EQ.0) GOTO216
25 IF(IO1.EQ.1) GOTO222
WRITE(IO,217) JM
217 FORMAT(1X,12HLOADING CASE,I2)
222 WRITE(IO,207) (IB(L),BV(L),L=1,IO)
30 207 FORMAT(1X,6(I3,E14.5,2X))
IF(INK.EQ.1) GOTO216
IO1=1
GO TO 202
C*****
C INPUT OF THE PRESCRIBED NODAL VALUES
C*****
35 216 CONTINUE
WRITE(IO,208)
208 FORMAT(////,1X,*PRESCRIBED NODAL VALUES*)
INK=0
40 209 READ(IN,203) IB,BV
IO=0
DO221L=1,6
IF(IB(L).LE.0) GOTO215
45 IO=IO+1
I=IB(L)
BC=BV(L)
C
C
C MODIFICATION OF THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND THE
50 GLOBAL FORCE MATRIX USING THE METHOD OF DELETION
OF ROWS AND COLUMNS
C
K=I-1
DO211J=2,NBW
M=I+J-1
IF(M.GT.NP) GOTO210
DO218JM=1,NCL
218 GF(M,JM)=GF(M,JM)-GSM(I,J)*BC
GSM(I,J)=0.0
60 210 IF(K.LE.0) GOTO 211
DO219JH=1,NCL
219 GF(K,JH)=GF(K,JH)-GSM(K,J)*BC
GSM(K,J)=0.0
K=K-1
65 211 CONTINUE
212 IF(GSM(I,1).LT.0.05) GSM(I,1)=50000C.
DO220JM=1,NCL
220 GF(I,JM)=GSM(I,1)*BC
221 CONTINUE
70 GO TO 214
C
C
C OUTPUT OF THE BOUNDARY VALUES. (BV)
C
75 215 INK=1
IF(IO.EQ.0) RETURN
214 WRITE(IO,207) (IB(L),BV(L),L=1,IO)
IF(INK.EQ.1) RETURN
GO TO 209
END

```



писывается в виде  $[RF] = [GSM][GF]$ . Подпрограмма MULTBD необходима для решения нестационарных задач.

### 18.3. Обозначения

В программах, приведенных в разд. 18.4—18.8, используются почти идентичные обозначения для описания основных переменных параметров. Ниже даны некоторые из наиболее общих переменных и их сокращенные обозначения.

A	Вектор-столбец, содержащий матрицы $\{\Phi\}$ , $\{F\}$ и $[K]$ из уравнения $[K]\{\Phi\} = \{F\}$
NS	Номера узлов элемента
ND	Степени свободы элемента (используются только в STRESS)
ESM	Матрица жесткости (теплопроводности) элемента
EF	Вектор нагрузки для элемента
PHI	Узловые значения для отдельного элемента
TITLE	Описательное утверждение, характеризующее решаемую задачу. Это утверждение печатается на каждой странице выдачи
IN	Номер входного устройства; используется в операторах READ ( )
IO	Номер выходного устройства; используется в операторах WRITE ( )
IP	Номер перфорационного устройства; используется в операторах WRITE ( ), если производится перфорация карт
NP	Число глобальных степеней свободы для задачи в целом
NE	Общее число элементов
NBW	Ширина полосы матрицы системы уравнений
NEL	Номер отдельного элемента
NCL	Номер варианта нагружения
X1, X2, X3	} $x$ -координаты узлов элемента (узлы обходятся против часовой стрелки)
X(1), X(2), X(3)	
Y1, Y2, Y3	} $y$ -координаты узлов элемента (узлы обходятся против часовой стрелки)
Y(1), Y(2), Y(3)	
B и C	Коэффициенты, которые встречаются при вычислении матриц элемента
AR4	Учетверенная площадь элемента
AR2	Удвоенная площадь элемента
JGF	Величина, значение которой определяет адрес последней ячейки памяти, отводимой для $\{\Phi\}$ в одномерном массиве A

JGSM	Величина, значение которой определяет адрес последней ячейки памяти для $\{F\}$ в одномерном массиве A
JEND	Величина, значение которой определяет адрес последней ячейки памяти, отводимой для $[K]$ в одномерном массиве A

## 18.4. Программа TORSION

Программа TORSION вычисляет сдвиговые напряжения в упругом стержне некругового сечения. Теоретической основой программы служит материал, изложенный в разд. 6.1. При составлении программы использовались положения, обсужденные в гл. 7.

Входные данные представлены титульной картой, картой с параметрами программы, исходными данными элементов, значениями узловых сил и граничными значениями искомой величины, считываемыми подпрограммой BDYVAL, а также дополнительным комплектом исходных данных элементов. Титульная карта считывается в 18-й строке, а карта параметров программы — в 20-й строке. Переменные NP, NE, NBW и IPCN были определены выше в списке обозначений. Другие переменные, содержащиеся в карте параметров, следующие:

G	Модуль сдвига, Н/см <sup>2</sup>
SL	Длина стержня, см
TORQUE	Прикладываемый крутящий момент, Н·см
PCT	Удвоенное число осей симметрии. PCT равно 1.0, если осей симметрии не существует

Исходные данные элемента считываются в строке 46. Формат этих данных совпадает с форматом данных, перфорируемых программой GRID. Подпрограмма BDYVAL, обращение к которой происходит в строке 82, также имеет операторы ввода данных. Эти операторы обсуждаются в разд. 18.2. Исходные данные элемента, необходимые для вычисления сдвиговых напряжений, считываются в строке 92. Эти данные для элементов должны быть точной копией данных, используемых при составлении глобальной матрицы жесткости.

Величины, указывающие где именно внутри одномерного массива A хранятся узловые значения искомой величины, узловые силы и глобальная матрица жесткости, находятся в строках 26, 27 и 28. Эти величины были определены в списке обозначений. Входные данные для варианта задачи о кручении, показанного на фиг. 18.9, представлены полностью, за исключением исходных данных элементов, в табл. 18.2. Карта узловых сил, которая считывается при обращении к программе BDYVAL, состоит только из одного числа — 1, так как узловые силы отсутствуют в задаче

1		5	6	7	10		20		30		40		50		60		70	72	73		80
---	--	---	---	---	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	----	----	--	----

TORSION PROBLEM FOR TEXTBOOK Титульная карта

[illegible]

Карта параметров программы

	1	6	7	1				0	.	3	0	0	0				0	.	3	0	0	0				0	.	3	5	0	0				0	.	3	1	8	7				0	.	3	5	0	0				0	.	3	5	0	0
--	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---

6	4	3	1	2	6	4	3					0	.	2	5	0	0					0	.	0						0	.	2	5	0	0					0	.	0	6	2	5					0	.	1	4	3	7					0	.	0	5	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---

Исходные  
данные эле-  
ментов  
(64 карты)

	-1		
--	----	--	--

 Значения узловых сил  
(-1 означает отсутствие данных)

**Заданные узловые значения искомой величины**

[illegible][illegible][illegible]

Исходные  
данные  
элементов  
(64 карты)

```

PROGRAM TORSION(INPUT,OUTPUT,PUNCH,TAPE60=INPUT,TAPE61=OUTPUT,TAPE
162=PUNCH)
DIMENSION NS(3),ESM(3,3),EF(3),B(3),C(3),PHI(3)
DIMENSION A(2500)
COMMON/TITLE/TITLE(20)
REAL MOMENT
DATA IN/60/,IO/61/,IP/62/,NCL/1/,IO1/1/,KE/0/,MOMENT/0.0/,TAUMAX/0
$.0/
10  DEFINITION OF THE CONTROL PARAMETERS
      NP - NUMBER OF GLOBAL DISPLACEMENTS, NE - NUMBER OF
      ELEMENTS, G - SHEAR MODULUS, TORQUE - APPLIED TORQUE,
      SL - SHAFT LENGTH, PCT - TWICE THE NUMBER OF AXES OF
      SYMMETRY, PCT = 1.0 WHEN NO SYMMETRY EXISTS
      IPCH - CONTROL FOR PUNCHING STRESSES
15  INPUT OF THE TITLE CARD AND THE PARAMETER CARD

      READ(IN,3)TITLE
      3  FORMAT(20A4)
      READ(IN,1) NP,NE,NBW,IPCH,G,SL,TORQUE,PCT
      1  FORMAT(4I3,6F10.4)
      GT=G*(3.14157/180.)/SL

25  CALCULATION OF POINTERS AND INITIALIZATION OF THE COLUMN VECTOR A

      JGF=NP*NCL
      JGSM=JGF*2
      JEND=JGSM+NP*NBW
      0013I=1,JEND
      13 A(I)=0.0

30  OUTPUT OF TITLE AND DATA HEADINGS

      WRITE(IO,24) TITLE,G,SL,TORQUE
      24 FORMAT(1H1////////1X,20A4//1X,15H$SHEAR MODULUS =F12.1/1X,17H$LENGTH O
      1F $HAFT =F7.2/1X,16H$APPLIED TORQUE =F8.1/1X,12H$ELEMENT DATA//1X,
      279H$NCL NODE NUMBERS X(1) Y(1) X(2) Y(2)
      3 X(3) Y(3) )

40  ASSEMBLY OF THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND GLOBAL FORCE MATRIX

      INPUT AND ECHO PRINT OF ELEMENT DATA

45  DO 7 KK=1,NE
      READ(IN,1) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      WRITE(IO,23) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      23 FORMAT(1X,I3,2X,3I4,3X,6(2XF8.4))

50  CALCULATION OF THE ELEMENT STIFFNESS MATRIX AND ELEMENT FORCE MATRIX

      B(1)=Y2-Y3
      B(2)=Y3-Y1
      B(3)=Y1-Y2
      55 C(1)=X3-X2
      C(2)=X1-X3
      C(3)=X2-X1
      AR4=(X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3)*2.
      005I=1,3
      EF(I)=GT*AR4/6.
      005J=1,3
      5 ESM(I,J)=(B(I)*B(J)+C(I)*C(J))/AR4

60  INSERTION OF ELEMENT PROPERTIES INTO THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX

      007I=1,3
      II=NS(I)
      0015JF=1,NCL
      J5=JGF+(J-1)*NP+II
      70 15 A(IJ5)=A(IJ5)+EF(I)
      0017I=1,3
      JJ=NS(J)
      JJ=JJ-II+1
      75 16 J5=JGSM+(JJ-1)*NP+II
      A(IJ5)=A(IJ5)+ESM(I,J)
      17 CONTINUE
      7 CONTINUE

80  MODIFICATION AND SOLUTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS

      CALL BOYVAL(A(JGSM+1),A(JGF+1),NP,NBW,NCL)
      CALL DCMPBD(A(JGSM+1),NP,NBW)
      CALL SLVBD(A(JGSM+1),A(JGF+1),A(1),NP,NBW,NCL,IO1)

85  CALCULATION OF THE ELEMENT RESULTANTS

      INPUT OF THE ELEMENT DATA

90  DO 86 KK=1,NE
      READ(IN,1) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3

```

# RETRIEVAL OF THE NODAL VALUES

```

DO 20 I=1,3
  II=NS(I)
  20 PHI(I)=A(II)

```

## CALCULATION OF THE SHEAR STRESS VALUES AND TWISTING MOMENT FOR ONE DEGREE OF TWIST

```

AR2=(X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3)
MOMENT=MOMENT+AR2*(PHI(1)+PHI(2)+PHI(3))/3.
B(1)=Y2-Y3
B(2)=Y3-Y1
B(3)=Y1-Y2
C(1)=X3-X2
C(2)=X1-X3
C(3)=X2-X1
J2=JGF+NEL
J3=JGF+NE+NEL
A(IJ2)=0.0
A(IJ3)=0.0
DO 21 I=1,3
  A(IJ2)=A(IJ2)-B(I)*PHI(I)/AR2
  21 A(IJ3)=A(IJ3)+C(I)*PHI(I)/AR2
86 CONTINUE
MOMENT=MOMENT*PCT
THEATA=TORQUE/MOMENT

```

## CALCULATION AND OUTPUT OF THE TRUE NODAL VALUES

```

WRITE(10,30) TITLE
30 FORMAT(1H1////1X,20A4//1X,12HNODAL VALUES )
DO31 I=1,NP
  31 A(I)=A(I)*THEATA
  WRITE(10,32) (I,A(I),I=1,NP)
  32 FORMAT(1X,I3,E14.5,3X,I3,E14.5,3X,I3,E14.5,3X,I3,E14.5
  1)

```

## OUTPUT OF THE SHEAR STRESS VALUES

```

A(IJ2) = TAUZY, A(IJ3) = TAUZX
WRITE(10,80) TITLE
80 FORMAT(1X,////1X,20A4//1X,16HELEMENT STRESSES//5X, 54H ELEMENT
1 TAUZX TAUZY TAUMAX )
DO88 I=1,NE
  J2=JGF+I
  J3=JGF+NE+I
  A(IJ2)=A(IJ2)*THEATA
  A(IJ3)=A(IJ3)*THEATA
  TMAX=SQRT(A(IJ2)**2+A(IJ3)**2)
  IF(TMAX.LT.TAUMAX) GOT090
  TAUMAX=TMAX
  KE=I
  90 WRITE(10,85) I,A(IJ3),A(IJ2),TMAX
  85 FORMAT(7X,I3,3(5X,E12.5))
  IF(IPCH.EQ.0) GOT088
  WRITE(10,89) I,A(IJ3),A(IJ2),TMAX
  89 FORMAT(13,2X,6E12.6)
  88 CONTINUE
  WRITE(10,87) THEATA,TAUMAX,KE
  87 FORMAT( //// 1X,40HANGLE OF TWIST FOR THE APPLIED TORQUE ISF6.2
  2,8H DEGREES/1X,46HMAXIMUM SHEAR STRESS FOR THE APPLIED TORQUE ISF1
  20.1/1X,42HMAXIMUM SHEAR STRESS IS LOCATED IN ELEMENTI4)
  STOP
END

```

о кручении стержня. Набор заданных узловых значений искомой величины, считываемых подпрограммой BDYVAL, может оканчиваться либо нулем, либо целым отрицательным числом. Точно так же оканчивается карта узловых сил.

В строке 150 программы предусмотрена возможность перфорирования результатов элемента (сдвиговых напряжений) для дальнейшего использования их при вычислении согласованных результатов элемента, т. е. при вычислении узловых значений напряжений согласно методике, изложенной в гл. 6. Программа CONSTR вычисления согласованных узловых значений описана в следующем разделе.

## 18.5. CONSTR

Программа CONSTR связана с реализацией теории согласованных результатов элемента при вычислении узловых значений результатов элемента. Эта программа составлена для совместного использования либо с TORSION, либо STRESS (программа решения двумерных задач теории упругости).

Программой предусмотрен ввод следующих перфокарт: титульной карты, карты параметров программы, стандартных результатов элементов, исходных данных элементов.

Стандартными результатами элемента служат значения напряжений, отперфорированные программой TORSION или STRESS. Исходные данные элементов в точности совпадают с исходными данными элементов, используемыми программой TORSION или STRESS.

Пример комплекта исходных данных для программы CONSTR не будет приведен здесь, так как перфокарты с этими данными (за исключением двух карт) перфорируются другими программами. Эта программа может быть также использована для вычисления узловых значений результатов элементов в задачах течения грунтовых вод и переноса тепла. Однако программы для этих двух прикладных областей должны быть модифицированы так, чтобы они могли перфорировать выходные данные.

Приведем обозначения некоторых наиболее важных переменных, которые используются в CONSTR и которые не были определены ранее:

STR	Согласованные результаты элемента. Их число должно быть не больше 7
JCSTR	Величина, которая определяет адрес последней ячейки памяти, отводимой для хранения стандартных значений напряжений в одномерном массиве A
AREA	Площадь отдельного элемента
ERM	Вектор нагрузки для элемента
ECM	Матрица демпфирования элемента

```

PROGRAM CONSTR(INPUT,OUTPUT,TAPE60=INPUT,TAPE61=OUTPUT)
DIMENSION ECM(3,3),ERM(3,7),NS(3),STR(7),A(4500)
COMMON/TLE/TITLE(20)
DATA IN/60/,IO/61/,IO1/0/

```

```

*****
C NP - NUMBER OF NODES, NE - NUMBER OF ELEMENTS,
C NBW - BAND WIDTH, NCL - NUMBER OF STRESSES PER ELEMENT
*****

```

```

C INPUT OF TITLE AND PARAMETER CARD

```

```

C READ(IN,1) TITLE
1 FORMAT(20A4)
C READ(IN,2) NP,NE,NBW,NCL
15 2 FORMAT(4I3)

```

```

C CALCULATION OF POINTERS AND INITIALIZATION OF THE COLUMN VECTOR A

```

```

C JGF=NP*NCL
20 JGSM=JGF*2
JEND=JGSM*NP*NBW
JCSTR=JEND*NE*NCL
0013I=1,JCSTR
13 A(I)=0.0

```

```

C INPUT OF THE CONVENTIONAL ELEMENT RESULTANTS

```

```

C D06I=1,NE
READ(IN,4) NEL,(STR(J),J=1,NCL)
30 4 FORMAT(I3,2X,6E12,6)
D06K=1,NCL
J1=JEND*(K-1)*NE+NEL
6 A(J1)=STR(K)

```

```

C CALCULATION OF THE ELEMENT (C) MATRIX AND THE ELEMENT (R) MATRIX

```

```

C D040KK=1,NE
READ(IN,3) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
40 3 FORMAT(4I3,6F10,4)
20 AREA=(X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3)/2.
D05I=1,3
D08K=1,NCL
J1=JEND*(K-1)*NE+KK
45 8 ERM(I,K)=AREA*A(J1)/3.
D05J=1,3
COEF=1.0
IF(I.EQ.J) COEF=2.
5 ECM(I,J)=COEF*AREA/12.

```

```

C INSERTION OF ELEMENT PROPERTIES INTO THE COLUMN VECTOR A ( )

```

```

C D07I=1,3
II=NS(I)
D015J=1,NCL
55 J5=JGF+(J-1)*NP+II
15 A(J5)=A(J5)+ERM(I,J)
D017J=1,3
JJ=NS(J)
60 JJ=JJ-II+1
IF(JJ) 17,17,16
16 J5=JGSM+(JJ-1)*NP+II
A(J5)=A(J5)+ECM(I,J)
17 CONTINUE
7 CONTINUE
65 40 CONTINUE

```

```

C SOLUTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS

```

```

C CALL DCMPBD(A(JGSM+1),NP,NBW)
70 CALL SLVBD(A(JGSM+1),A(JGF+1),A(1),NP,NBW,NCL,IO1)
STOP
END

```

## 18.6. FLDMCH

Программа FLDMCH может быть использована для анализа двумерных безвихревых течений идеальных жидкостей, которые рассматриваются в задачах о грунтовых водах. Программой предусмотрен ввод следующих перфокарт: титульной карты, карты параметров программы, карты с исходными данными элементов, узловых сил и заданных узловых значений искомой величины, считываемых при обращении к BDYVAL. В списке обозначений не встречались следующие переменные:

PXX, PYY	Коэффициенты проницаемости в направлении осей $x$ и $y$ соответственно
VELX, VELY	Компоненты вектора скорости течения в направлении осей $x$ и $y$ соответственно

В табл. 18.3 представлены входные данные для задачи о течении грунтовых вод, обсужденной в разд. 9.2. Сеть разбиения на элементы показана на фиг. 9.3. Значения узловых сил определяются количеством воды, просочившейся вдоль русла реки и выкачанной в точках расположения двух насосов. Вдоль двух границ области заданы узловые значения искомой величины. Карта с числом —1 для номера элемента была использована для завершения работы программы (строка 84), так как результаты элементов не представляли интереса и поэтому не вычислялись.

Программа вычисляет компоненты скорости, соответствующие течению грунтовых вод и прямолинейному потоку. Компоненты скорости произвольного потенциального течения не могут быть вычислены с помощью этой программы.

## 18.7. TDHEAT

Программа TDHEAT вычисляет распределение температуры в двумерном теле, на границе которого либо происходит конвективный теплообмен, либо задана температура окружающей среды.

Входные данные аналогичны тем, которые используются в предыдущих программах. Вводятся следующие перфокарты: титульная карта, карта параметров программы, карты исходных данных элементов, узловых сил и заданные узловые значения искомой величины, вызываемые подпрограммой BDYVAL, карты исходных данных элементов или карта с числом —1.

Приведем обозначения наиболее важных переменных, которые еще не были определены:

KXX, KYY	Коэффициенты теплопроводности в направлении осей $x$ и $y$ соответственно
H	Коэффициент теплообмена

*Таблица 18.3*

[illegible]

4	5	6	4	7			4	0	.	0			2	0	.	0
---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---

Карта параметров программы

1	6	7	1			2	5	0	0	●	0			1	5	0	0	●	0			2	5	6	2	●	5			1	1	2	5	●	0			3	0	0	0	●	0			1	5	0	0	●	0
---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---	--	--	---	---	---	---	---	---

[illegible]

**Исходные  
данные  
элементов  
(64 карты)**

### Значения узловых сил

[illegible]

**Заданные узловые значения искомой величины**

	1	2	3	4	5	41		200●0		200●0		200●0		200●0		200●0		200●0	
	42	43	44	45				200●0		200●0		200●0		200●0					

☐ -1 ☐ ☐ ☐ Завершение ввода исходных данных элементов

```

PROGRAM FLOMCH(INPUT,OUTPUT,TAPE60=INPUT,TAPE61=OUTPUT)
DIMENSION NS(3),ESM(3,3),B(3),C(3),PHI(3),A(2500)
COMMON/TLE/TITLE(20)
DATA IN/60,IO/61,NCL/1,IO1/0/

```

```

5  DEFINITION OF THE CONTROL PARAMETERS
      NP - NUMBER OF GLOBAL POTENTIALS, NE - NUMBER OF ELEMENTS
      NBW - BANDWIDTH, PXX - PERMEABILITY IN X DIRECTION,
      PYY - PERMEABILITY IN THE Y DIRECTION

```

```

10 INPUT OF THE TITLE CARD AND THE CONTROL PARAMETERS

```

```

      READ(IN,3)TITLE
      3 FORMAT(20A4)
      READ(IN,2) NP,NE,NBW,PXX,PPY
      2 FORMAT(3I3,1X,2F10.5)

```

```

20 CALCULATION OF POINTERS AND INITIALIZATION OF THE COLUMN VECTOR A ( )

```

```

      JGF=NP*NCL
      JGSM=JGF*2
      JEND=JGSM+NP*NBW
      DO13I=1,JEND
      13 A(I)=0.0

```

```

30 OUTPUT OF TITLE AND DATA HEADINGS

```

```

      WRITE(IO,4) TITLE,PXX,PPY
      4 FORMAT(1H1////1X,20A4//1X,5HPXX =,F9.1//1X,5HPYY =,F9.1//1X,78HNEI
      1 NODE NUMBER X(1) Y(1) X(2) Y(2) X(3) Y(3)
      2 Y(3) )

```

```

35 ***** ASSEMBLY OF THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND GLOBAL FORCE MATRIX
*****

```

```

      INPUT AND ECHO PRINT OF ELEMENT DATA

```

```

      DO 7 KK=1,NE
      READ(IN,1) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      1 FORMAT(I1,3,6F10.4)
      WRITE(IO,23) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      23 FORMAT(1X,I3,2X,3I4,1X,6(2X,F8.1))

```

```

45 CALCULATION OF THE CONDUCTION MATRIX

```

```

      B(1)=Y2-Y3
      B(2)=Y3-Y1
      B(3)=Y1-Y2
      C(1)=X3-X2
      C(2)=X1-X3
      C(3)=X2-X1
      AR4=(X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3)*2.
      DO5I=1,3
      DO5J=1,3
      5 ESM(I,J)=(PXX*B(I)*B(J)+PPY*C(I)*C(J))/AR4

```

```

60 INSERTION OF ELEMENT PROPERTIES INTO THE COLUMN VECTOR A ( )

```

```

      DO7I=1,3
      II=NS(I)
      DO17J=1,3
      JJ=NS(J)
      JJ=JJ-II+1
      IF(IJJ)17,17,16
      16 JS=JGSM+(JJ-1)*NP+II
      A(JS)=A(JS)+ESM(I,J)
      17 CONTINUE
      7 CONTINUE

```

```

70 MODIFICATION AND SOLUTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS

```

```

      CALL BDYVAL(A(JGSM+1),A(JGF+1),NP,NBW,NCL)
      CALL DCMPRO(A(JGSM+1),NP,NBW)
      75 CALL SLVBD(A(JGSM+1),A(JGF+1),A(1),NP,NBW,NCL,IO1)

```

```

      ***** CALCULATION OF THE ELEMENT RESULTANTS
*****

```

```

80 INPUT OF THE ELEMENT DATA

```

```

      DO 86 IJ=1,NE
      READ(IN,1) NEL,NS,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      IF(NEL.L.0) STOP
      IF(IJ.GT.1) GOTO81
      WRITE(IO,80) TITLE
      80 FORMAT(1H1////1X,20A4//1X,27HELEMENT VELOCITY COMPONENTS//5X,37HEI
      1 ELEMENT VEL(X) VEL(Y) )

```

```

90 RETRIEVAL OF THE NODAL VALUES FOR THE ELEMENT

```

```

      81 DO20I=1,3

```

```

      II=NS(II)
20  PHI(II)=A(II)
95  CCC  CALCULATION OF THE VELOCITY COMPONENTS
      B(1)=Y2-Y3
      B(2)=Y3-Y1
100  B(3)=Y1-Y2
      C(1)=X3-X2
      C(2)=X1-X3
      C(3)=X2-X1
105  AR2=(X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3)
      GRADX=0.0
      GRADY=0.0
      DO21 I=1,3
21  GRADX=GRADX+B(II)*PHI(II)/AR2
      GRADY=GRADY+C(II)*PHI(II)/AR2
110  VELX=-PXX*GRADX
      VELY=-PYY*GRADY
86  WRITE(10,85) NEL,VELX,VELY
85  FORMAT(7X,I3,5X,E12.5,5X,E12.5)
115  STOP
      END

```

TINF	Температура окружающей среды в точках поверхности конвективного теплообмена
JTAVE	Величина, которая определяет адрес последней ячейки памяти, отводимой в одномерном массиве A для средних по элементу значений температуры
ISIDE	Стороны элемента, на которых происходят конвективные потери тепла

В этой программе предусмотрена возможность перфорации (строка 141) средних по элементу значений температуры, с тем чтобы можно было использовать эти значения для анализа температурных напряжений с помощью программы STRESS (программа решения двумерных задач теории упругости).

В табл. 18.4 представлены входные данные для примера, рассмотренного в гл. 8. Приведены четыре карты с данными для элементов, которые модифицированы после того, как были отперфорированы программой GRID. Модификация этих карт была необходима в связи с тем, что на одной из сторон каждого из этих элементов наблюдаются конвективные потери тепла. Так как потери тепла в каждом случае наблюдаются на второй стороне элемента, то в столбце 75 каждой карты было пробито число 2. Если конвективному теплообмену подвержено более одной стороны элемента, то еще одно число должно быть пробито в столбце 78 перфокарты. Конвективному теплообмену могут быть подвержены не более двух сторон любого элемента.

Одно значение узловой силы соответствует линейному источнику в узле 21. Граничные значения искомой величины не заданы, поэтому ввод заданных узловых значений ограничивается числом —1 в столбцах 2 и 3. Второй комплект карт с исходными данными элементов необходим для вычисления результатов элемента: сред-

[illegible]

H	E	A	T		T	R	A	N	S	F	E	R		P	R	O	B	L	E	M		F	O	R		T	E	X	T	B	O	O	K					
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--

Титульная карта

6	5	9	6	7	0	1	0	0	1	0	0	5	0	-	5	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Карта параметров программы

Исходные данные элементов (96 карт)

1	6	7	1		0●0		5●3125	0●4531	5●3594	0●0	6●0		
2	7	2	1		0●4531		5●3594	0●5000	6●0	0●0	6●0		2
3	7	8	2		0●4531		5●3594	0●9375	5●4063	0●50	6●0		
4	8	3	2		0●9375		5●4063	1●0000	6●0	0●50	6●0		2
5	8	9	3		0●9375		5●4063	1●4531	5●4531	1●0	6●0		
6	9	4	3		1●4531		5●4531	1●5000	6●0	1●0	6●0		2
7	9	10	4		1●4531		5●4531	2●0	5●50	1●50	6●0		
8	10	5	4		2●0		5●50	2●0	6●0	1●50	6●0		2

[illegible][illegible]

-1							
----	--	--	--	--	--	--	--

*Заданные узловые значения температуры  
(-1 означает отсутствие данных)*

*Исходные данные элементов (96 карт)*

[illegible][illegible]

```

PROGRAM TOHEAT(INPUT,OUTPUT,PUNCH,TAPE60=INPUT,TAPE61=OUTPUT,TAPE6
12=PUNCH)
DIMENSION NS(3),ESM(3,3),EF(3),X(3),Y(3),B(3),C(3)
DIMENSION ISIDE(2),A(2500),PHI(3)
COMMON/TLE/TITLE(20)
REAL KXX,KYY,LG
DATA IN/60/,IO/61/,NCL/1/,IO1/0/,IP/62A
DEFINITION OF THE CONTROL PARAMETERS
NP, NE, NBW, IPCH, KXX, KYY, H, TINF - NUMBER OF
ELEMENTS, NBW - BAND WIDTH, KXX - CONDUCTIVITY IN X DIRECTION,
KYY - CONDUCTIVITY IN THE Y DIRECTION, H - CONVECTION
COEFFICIENT, TINF - FLUID TEMPERATURE

INPUT OF THE TITLE CARD AND THE CONTROL PARAMETERS

READ(IN,3) TITLE
3 FORMAT(20A4)
READ(IN,2) NP,NE,NBW,IPCH,KXX,KYY,H,TINF
2 FORMAT(4I3,4F10.5)

CALCULATION OF POINTERS AND INITIALIZATION OF THE COLUMN VECTOR A

JGF=NP*NCL
JGSM=JGF*2
JEND=JGSM+NP*NBW
DO13I=1,JEND
A(I)=0.0

OUTPUT OF TITLE AND DATA HEADINGS

WRITE(IO,4) TITLE,KXX,KYY,H,TINF
4 FORMAT(1H1,////1X,20A4//1X,5HXKXX =,F7.1,10X,5HKYY =,F7.1/1X,14HCO
1VECTION COEFF =,F7.1/1X,12HFLUID TEMP =,F7.1/1X,17HNEL NODE NUM
2BER,6X,4HX(1),6X,4HY(1),6X,4HX(2),6X,4HY(2),6X,4HX(3),6X,4HY(3) )

ASSEMBLYING OF THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND GLOBAL FORCE MATRIX

INPUT AND ECHO PRINT OF ELEMENT DATA

DO 7 KK=1,NE
READ(IN,1) NEL,NS,X(1),Y(1),X(2),Y(2),X(3),Y(3),ISIDE
1 FORMAT(4I3,6F10.4,2I3)
WRITE(IO,23) NEL,NS,X(1),Y(1),X(2),Y(2),X(3),Y(3)
23 FORMAT(1X,I3,2X,3I4,3X,6(2X,F8.4))

CALCULATION OF THE CONDUCTION MATRIX

B(1)=Y(2)-Y(3)
B(2)=Y(3)-Y(1)
B(3)=Y(1)-Y(2)
C(1)=X(3)-X(2)
C(2)=X(1)-X(3)
C(3)=X(2)-X(1)
AR4=(X(2)*Y(3)+X(3)*Y(1)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)-X(3)*Y(2)-X(1)*Y(3))
1 *2
DO5I=1,3
EF(I)=0.0
DO5J=1,3
5 ESM(I,J)=(KXX*B(I)*B(J)+KYY*C(I)*C(J))/AR4

CALCULATION OF THE CONVECTION RELATED QUANTITIES

DO10I=1,2
IF (ISIDE(I).LE.0) GOTO8
J=ISIDE(I)
12 FORMAT(1X,23HCONVECTION FROM SIDE,I2,11H OF ELEMENT,I4)
K=J+1
IF(J.EQ.3) K=1
LG=SQRT((X(K)-X(J))**2+(Y(K)-Y(J))**2)
HL=H*LG
EF(J)=EF(J)+HL*TINF/2.
EF(K)=EF(K)+HL*TINF/2.
ESM(J,J)=ESM(J,J)+HL/3.
ESM(J,K)=ESM(J,K)+HL/6.
ESM(K,J)=ESM(J,K)
ESM(K,K)=ESM(K,K)+HL/3.

INSERTION OF ELEMENT PROPERTIES INTO THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX

8 DO7I=1,3
II=NS(I)
DO15J=1,NCL
J5=(NCL+J-1)*NP+II
15 A(IJ5)=A(IJ5)+EF(I)
DO17J=1,3
JJ=NS(J)
JJ=JJ-II+1
IF(JJ)17,17,16
16 J5=JGSM+(JJ-1)*NP+II
A(IJ5)=A(IJ5)+ESM(I,J)
17 CONTINUE
7 CONTINUE
CALL BDYVAL(A(JGSM+1),A(JGF+1),NP,NBW,NCL)

```

ней по элементу температуры и градиента температуры в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Программа STRESS может быть использована для анализа напряженно-деформированного состояния тонких упругих двумерных тел, на границе которых заданы внешние силы или перемещения. Рассматривается случай плосконапряженного состояния, хотя программа легко может быть модифицирована для анализа плоской деформации. Ввод данных осуществляется по той же схеме, что и во всех предыдущих программах. Вводятся следующие перфокарты: титульная карта, карта параметров программы, карты исходных данных элементов, узловые силы и заданные узловые значения перемещений, вызываемые подпрограммой BDYVAL, карты исходных данных элементов или карты с числом —1.

Приведем обозначения наиболее важных переменных, не обсуждавшихся ранее:

*Таблица 18.5*

[illegible]

### Титульная карта

[illegible]

### Карта параметров программы

1	6	7	2		1	2	0	0	0		0	0		1	2		1	0		0	0		1	0
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	--	---	---	--	---	---	--	---	---	--	---	---	--	---	---

Исходные  
данные  
элементов  
(144 карты)

[illegible]

### Заданные узловые силы

[illegible]

### Заданные узловые перемещения

[illegible][illegible]

Исходные  
данные  
элементов  
(144 карты)

[illegible]

```

PROGRAM STRESS (INPUT,OUTPUT,PUNCH,TAPB6C=INPUT,TAPE61=OUTPUT,
1TAPE62=PUNCH)

5      CCCCCC
      DEFINITION OF THE CONTROL PARAMETERS
      NP - NUMBER OF GLOBAL DISPLACEMENTS, NE - NUMBER OF
      ELEMENTS, NBW - BANDWIDTH, IPCH - PUNCH CONTROL,
      ITEMP - ELEMENT TEMPERATURE INPUT CONTROL,
      EM - ELASTIC MODULUS, PR - POISSONS RATIO,
      ALPHA - COEF OF THERMAL EXP, TEMPI - INITIAL TEMP
10     T - ELEMENT THICKNESS
      DIMENSION NS(6),ND(3),ESH(6,6),EF(6),B(6,6),C(6,3),D(3,3)
      DIMENSION STRA(3),STRE(3),ET(3),U(6),A(11000)
      COMMON/FILE(20)
      DATA IN/60/,IO/51/,IP/62/,NCL/1/,ID1/0/,IELR/0/

15     C
      INPUT OF THE TITLE CARD AND THE CONTROL PARAMETERS

      READ(6C,3)TITLE
      3 FORMAT(20A4)
      READ(IN,1) NP,NE,NBW,ITEMP,IPCH,EM,PR,ALPHA,TEMP,T
      1 FORMAT(5I3,5F10.5)

      C
      GENERATION OF THE MATERIALS PROPERTY MATRIX D

25     R=EM/(1.0-PR*PR)
      D(1,1)=R
      D(2,2)=D(1,1)
      D(3,3)=R*(1.0-PR)/2.
      D(1,2)=PR*R
      D(2,1)=D(1,2)
      D(1,3)=0.0
      D(3,1)=0.0
      D(2,3)=0.0
      D(3,2)=0.0

30     C
      CALCULATION OF THE POINTERS AND INITIALIZATION OF THE COLUMN-VECTOR A

      JP=NE
      JGS=JP*NP
      JEND=JGS*NP*NBW
      DO13 I=1, JEND
13     A(I)=0.0

45     C
      INPUT OF THE AVERAGE TEMPERATURE FOR EACH ELEMENT

      IF(ITEMP.EQ.0) GOTO6
      READ(IN,14) (A(I),I=1,NE)
      14 FORMAT(6F12.6)

      C
      OUTPUT OR TITLE AND DATA HEADINGS

      6 WRITE(IO,24) TITLE,EM,PR,ALPHA,T,TEMP
      24 FORMAT(11H1///1X,20A4//1X,17HELASTIC MODULUS =,F10.1/1X,16HPOISSONS
55     1 RATIO =,F6.3/1X,21HCOEF OF THERMAL EXP =,F9.6/1X,19HELEMENT THIC
      KNES =,F7.3/1X,21HINITIAL TEMPERATURE =,F5.1/1X,18HNODE NU
      MBERS,6X,4HX(1),6X,4HY(1),8X,4HX(2),6X,4HY(2),6X,4HX(3),5X,4HY(3),
      56X,2H0T )
      *****
      60     C
      ASSEMBLY OF THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND THE GLOBAL FORCE VECTOR
      *****

      C
      INPUT AND ECHO PRINT OF ELEMENT DATA

65     DO7KK=1,NE
      READ(IN,2) NEL,ND,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3
      2 FORMAT(4I3,6F10.4)
      DT=A(NEL)-TEMP
      WRITE(IO,23) NEL,ND,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,DT
70     23 FORMAT(1X, 13,2X,3I4,3X,7(2X,F8.4))

      C
      CALCULATION OF THE GLOBAL DOF FROM THE NODE NUMBERS

75     31 DO14 I=1,3
      NS(2*I-1)=ND(I)*2-1
      14 NS(2*I)=ND(I)*2

      C
      GENERATION OF THE B MATRIX AND THE INITIAL STRAIN MATRIX, ET

80     DO 20 I=1,3
      DO 20 J=1,6
      20 B(I,J)=0.0
      B(1,1)=Y2-Y3
      B(1,3)=Y3-Y1
      B(1,5)=Y1-Y2
      B(2,2)=X3-X2
      B(2,4)=X1-X3
      B(2,6)=X2-X1
      B(3,1)=B(2,2)
      B(3,2)=B(1,1)
      B(3,3)=B(2,4)
      B(3,4)=B(1,3)
      B(3,5)=B(2,6)
      B(3,6)=B(1,5)
      ET(1)=ALPHA*DT
      ET(2)=ET(1)
      ET(3)=0.0
      AR2=X2*Y3+X3*Y1+X1*Y2-X2*Y1-X3*Y2-X1*Y3
      IF(IELR.EQ.1) GOTO65

100    C
      MATRIX MULTIPLICATION TO OBTAIN C = (B)(D)

      DO 22 I=1,6

```

```

105      DO 22 J=1,3
        C(I,J)=0.0
        DO 22 K=1,3
          C(I,J)=C(I,J)+B(K,I)*D(K,J)
110      C      MATRIX MULTIPLICATION TO OBTAIN ESM AND EP
          ESM = (BT)(D)(B) = (C)(B)
          EF = (BT)(D)(ET) = (C)(ET)
          C
          DO 27 I=1,6
            SUM1=0.0
            DO 29 K=1,3
              SUM1=SUM1+C(I,K)*ET(K)
            DO 27 J=1,6
              SUM=0.0
              DO 28 K=1,3
                SUM=SUM+C(I,K)*B(K,J)
                ESM(I,J)=SUM*T/2, *AR2)
                EF(I,J)=SUM1*T/2.
125      C      INSERTION OF ELEMENT PROPERTIES IN THE GLOBAL MATRICES
          DO 7 I=1,6
            II=NS(I)
            J5=JGF+II
            A(J5)=A(J5)+EF(II)
130      DO 17 J=1,6
              JJ=NS(J)
              JJ=JJ+1-II
              IF(JJ) 17,17,16
            16 J5=JGSM+(JJ-1)*NP+II
              A(J5)=A(J5)+ESM(II,J)
            17 CONTINUE
            7 CONTINUE
          C
          C      MODIFICATION AND SOLUTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS
140      C      CALL BDYVAL(A(JGSM+1),A(JGF+1),NP,NBW,NCL)
          CALL OLCPBD(A(JGSM+1),NP,NBW)
          CALL SLVBD(A(JGSM+1),A(JGF+1),NP,NBW,NCL,ID1)
          C*****
145      C      LOOP TO CALCULATE ELEMENT RESULTANTS
          C*****
          WRITE(10,80) TITLE
          80 FORMAT(1H1,20A4//1X,28HELEMENT STRAINS AND STRESSES )
          IELR=1
          150      1 J=1
          86 READ(IN,2) NEL,ND,X1,Y1,X2,Y2,K3,Y3
          DT=A(NEL)-TEMP
          GOTO 31
          C
          C      RETRIEVAL OF THE ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS
          C
          65 DO 53 I=1,6,2
            NS1=JP+NS(I)
            NS2=JP+NS(I+1)
            U(I)=A(NS1)
            160      53 U(I+1)=A(NS2)
          C
          C      CALCULATION OF THE STRAIN VECTOR. (STRAIN) = (B)(U)-(ET)
          C
          DO 55 I=1,3
            STRA(I)=0.0
            DO 55 K=1,6
              55 STRA(I)=STRA(I)+B(I,K)*U(K)/AP2
          C
          C      CALCULATION OF THE STRESS VECTOR. (STRESS) = (D)(STRAIN)
          C
          DO 51 I=1,3
            STRE(I)=0.0
            DO 51 K=1,3
              51 STRE(I)=STRE(I)+D(I,K)*STRA(K)-ET(I)
          C
          C      CALCULATION OF THE PRINCIPAL STRESSES
          C
          AA=(STRE(1)+STRE(2))/2.
          AB=SQRT(((STRE(1)-STRE(2))/2.)**2+STRE(3)**2)
          S1=AA+AB
          S2=AA-AB
          TH=AB
          IF(ABS(STRE(1)-STRE(2)).LT.0.001) GOTD
          AC=ATAN2(2.*STRE(3),STRE(1)-STRE(2))
          THM=((180.0/3.14159265)*AC)/2.0
          GO TO 94
          93 THM=90.0
          94 CONTINUE
190      C      PRINTING OF THE RESULTS
          C
          WRITE(10,57) NEL
          57 FORMAT(1X,7HELEMENT,14)
          195      WRITE(10,95) STRA(1),STRE(1),S1,STRA(2),STRE(2),S2,STRA(3),
            1STRE(3),TH,THM
          95 FORMAT(15X,5HEXX =,E12.5,5X,5HSHX =,E12.5,5X,5HS1 =,E12.5/5X,5HZY
            1Y =,E12.5,5X,5HSHY =,E12.5,5X,5HS2 =,E12.5/5X,5HGX =,E12.5,5X,5H
            21XY =,E12.5,5X,5HMTMX =,E12.5,6X,5HANGLE,F8.2,5H DEGREES )
          IF(IPH.EQ.1) GOTD86
200      96 WRITE(IP,106) NEL,STRE(1),STPE(2),STRE(3),S1,S2,TH
          100 FORMAT(I3,2X,6E12.6)
          1 J=J+1
          IF(IJ.LE.NE) GOTO 86
          STOP
          ENO
205

```

ЕМ	Модуль упругости
PR	Коэффициент Пуассона
ALPHA	Коэффициент теплового расширения
TEMP	Температура начального установившегося состояния
T	Толщина тела
JTAVE	Величина, которая определяет адрес последней ячейки памяти, отводимой в одномерном массиве A для средних по элементам значений температуры
ITEMP	Контрольная величина в задаче о тепловых напряжениях. ITEMP=1 означает, что средние значения температуры элементов должны быть считаны
IPCH	Контрольная величина, которая управляет выводом на перфорацию значений напряжений в элементах IPCH=1 соответствует перфорированию карт; 0 означает отсутствие данных, предназначенных для перфорирования

В табл. 18.5 представлены исходные данные для задачи о выточке, обсужденной в гл. 12. Должна быть решена система из 190 уравнений, так как общее число узлов равно 95 и в каждом узле рассматривается по две неизвестные компоненты вектора перемещений. Число 0 в столбце 12 карты параметров указывает на то, что при решении задачи данные о температуре элементов не понадобятся в расчетах; число 1 в столбце 15 указывает на то, что значения напряжений в элементах должны быть отперфорированы для дальнейшего использования. Если в расчетах необходимо учесть значения средней по элементам температуры, эти значения вводятся вслед за параметрами программы перед вводом карт с исходными данными элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Collins R. J., Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 6, 345—356 (1973).
2. Organick E. I., A Fortran IY Primer, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
3. Steinmueller G., Restrictions in the Application of Automatic Mesh Generation Schemes by Isoparametric Coordinates, *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*, 8, 289—294 (1974).

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предыдущие 18 глав книги следует рассматривать как введение в прикладные аспекты метода конечных элементов. В них даны обзор интерполяционных свойств базисных элементов и вывод основных уравнений метода как аналитически, так и с помощью численного интегрирования. Рассмотрены вопросы реализации метода на ЭВМ и получены численные решения некоторых простых задач с помощью ЭВМ.

Слово «введение» подразумевает, однако, существование дополнительного материала. Действительно, прикладные области, рассмотренные в этой книге, — только небольшая часть всех возможных применений метода. Существует множество других областей приложения метода конечных элементов, которые не были здесь затронуты, например почти все разделы механики деформируемого твердого тела, динамические задачи. Эти области обсуждаются в работах [1, 3, 7]. Современные прикладные аспекты метода рассматриваются в технической литературе. Обширная библиография по методу конечных элементов содержится в работе [6].

В этой книге не обсуждается математическое обоснование метода конечных элементов. В последние годы этой теме уделяется много внимания со стороны математиков. Математические аспекты метода, такие, как исследование сходимости и оценки ошибок, рассматриваются в нескольких книгах (см., например, [2, 4, 5]).

По мнению автора, настоящий учебник снабдит читателя базисной информацией, на основе которой каждый желающий сможет углубить свои знания в любом из конкретных направлений. Читатель теперь должен обратиться к технической литературе, связанной с применениями метода конечных элементов в той области, в которой он специализируется.

В настоящее время метод конечных элементов широко используется как эффективный метод решения инженерных и физических задач. Будущий инженер должен изучить основные идеи метода и современное его состояние. Именно изложению основ метода и посвящена эта книга; аспекты современного его состояния оставляются на усмотрение читателя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cook R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, N. Y., 1974.
2. deBoor C., Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Academic Press, N. Y., 1974.
3. Gallagher R. H., Finite Element Analysis Fundamentals, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.
4. Strang G., Fix G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
5. Whiteman J. R., ed., The Mathematics of Finite Elements and Applications, Academic Press, N. Y., 1973.
6. Whiteman J. R., A Bibliography for Finite Elements, Academic Press, N. Y., 1975.
7. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971: есть русский перевод: Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, изд-во «Мир», М., 1975.

## Приложение А

### НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление связано с отысканием стационарных значений функционалов. Функционал представляет собой определенный интеграл, который принимает некоторое числовое значение при подстановке каждой конкретной функции в подынтегральное выражение. Например, интегралу

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (a)$$

при подстановке каждой конкретной функции  $F(x)$  соответствует определенное числовое значение.

Основная задача вариационного исчисления состоит в отыскании такой функции  $F(x)$ , чтобы при произвольном бесконечно малом изменении этой функции  $\delta F(x)$  величина  $I$  оставалась неизменной. Рассмотрим функционал

$$I = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi_x) dx, \quad (б)$$

где  $x$  — независимая переменная;  $\varphi$  — переменная, зависящая от  $x$ , а  $\varphi_x$  — первая производная  $\varphi$  по  $x$ . Варьирование  $I$  вызывается изменением  $F(x)$ :

$$\delta I = \int_a^b \delta F(x) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta \varphi_x \right) dx. \quad (в)$$

Замечая, что

$$\delta \varphi_x = \frac{d}{dx} (\delta \varphi) \quad (г)$$

и интегрируя по частям второй член подынтегрального выражения, получаем

$$\delta I = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \right] \delta \varphi dx + \left. \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta \varphi \right|_a^b. \quad (д)$$

Функционал  $I$  принимает стационарное значение, если  $\delta I = 0$ . Величина  $\delta I$  в выражении (д) обращается в нуль, если равен нулю интеграл, входящий в это выражение, а, кроме того,

$$\varphi(a) = \text{const}, \quad \varphi(b) = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\delta\varphi(a) = \delta\varphi(b) = 0, \quad (\text{е})$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(a) = \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(b) = 0. \quad (\text{ж})$$

Так как  $\delta\varphi$  произвольна на отрезке между точками  $a$  и  $b$ , на этом отрезке должно удовлетворяться дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) = 0, \quad (\text{з})$$

что обеспечивает равенство нулю указанного интеграла.

Функционал может иметь несколько независимых переменных. Рассмотрим функционал с тремя независимыми переменными:

$$I = \int_V F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dV. \quad (\text{и})$$

Произвольному бесконечно малому изменению  $F(x, y, z)$  соответствует вариация функционала

$$\delta I = \int_V \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi_x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \delta\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \delta\varphi_z \right) dV. \quad (\text{к})$$

Используя соотношение (г), получаем

$$\begin{aligned} \delta I = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta\varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta\varphi) \right] dV. \end{aligned} \quad (\text{л})$$

Интегрируя по частям второй член в (л) и применяя формулу Гаусса, имеем

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi \right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \delta\varphi dV$$

или

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi) dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \delta\varphi dV, \quad (\text{м})$$

где  $l_x$  — направляющий косинус нормали к поверхности с осью  $x$ .

Преобразуя аналогичным образом другие члены в (л) и объединяя результаты интегрирования, находим для вариации функционала

$$\delta I = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) \right] \delta \varphi dV + \\ + \int_S \left[ l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right] \delta \varphi dS. \quad (\text{н})$$

Стационарное значение  $I$  получается только при условии, что выражения в скобках в обоих интегралах обращаются в нуль. Выполнение этих требований позволяет записать дифференциальные уравнения и граничные условия, которым удовлетворяет искомая функция.

Соотношение (н) соответствует вариационной формулировке задач теории поля, обсужденных в этой книге. Рассмотрим функционал

$$\int_V \frac{1}{2} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\varphi \right] dV. \quad (\text{о})$$

Соотношение (н) устанавливает, что функция, сообщающая стационарное (минимальное) значение этому функционалу, должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = 0.$$

Рассматривая по отдельности каждое слагаемое, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2Q, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 2K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 2K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = 2K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Объединяя результаты последних преобразований, получаем

$$Q + K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Итак, функция, сообщающая стационарное значение функционалу из формулы (о), должна удовлетворять дифференциальному уравнению для задач теории поля.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Fung Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.  
Huebner K. H., The Finite Element Method for Engineers, Wiley, N. Y., 1975.  
Pars L. A., An Introduction to the Calculus of Variations, Heineman, London, 1962.

## Приложение Б

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МАТРИЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Процедура минимизации, обсужденная в гл. 5, включает дифференцирование матричных произведений  $[N]\{\Phi\}$  и  $\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}$  по  $\{\Phi\}$ , где  $[N]$  — вектор-строка и  $[A]$  — квадратная матрица. Указанное дифференцирование выполняется сравнительно просто, но так как этой операции не уделяется внимания в большинстве пособий по матричной алгебре, то мы рассмотрим ее в этом приложении.

Рассмотрим соотношение

$$\varphi = [N] \{\Phi\}, \quad (a)$$

где

$$[N] = [N_1 N_2, \dots, N_r], \quad \{\Phi\}^T = [\Phi_1 \Phi_2, \dots, \Phi_r].$$

Мы хотим вычислить величину производной  $\varphi$  по  $\{\Phi\}$ , т. е.  $\partial\varphi/\partial\{\Phi\}$ . Эта производная определяется следующим вектор-столбцом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} \end{Bmatrix}. \quad (б)$$

Компоненты вектор-столбца производных (б) вычисляются с помощью произведения (а), которое в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + \dots + N_r\Phi_r. \quad (в)$$

Дифференцируя последнее соотношение, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} = N_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} = N_2 \dots \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} = N_r. \quad (г)$$

Подстановка полученных выражений (б) дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{Bmatrix} = [N]^T. \quad (\text{Б1})$$

Дифференцирование  $\{\Phi\}^T [N]^T$  по  $\{\Phi\}$  приводит к той же самой формуле, так как это произведение идентично (в).

Рассмотрим теперь произведение вида  $\{\Phi\}^T [A] \{\Phi\}$ . Операцию дифференцирования этого произведения легко проиллюстрировать, если ограничиться малым числом коэффициентов в матрице  $[A]$ . Пусть симметричная матрица  $[A]$  имеет размеры  $2 \times 2$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{д})$$

и  $\{\Phi\}^T = [\Phi_1 \Phi_2]$ . Используя условие симметрии  $a_{12} = a_{21}$ , запишем произведение в виде

$$\varphi = \{\Phi\}^T [A] \{\Phi\} = a_{11}\Phi_1^2 + 2a_{12}\Phi_1\Phi_2 + a_{22}\Phi_2^2. \quad (\text{е})$$

Дифференцируя (е), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2. \quad (\text{ж})$$

Подставляя эти соотношения в (б), получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{bmatrix} 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2 \\ 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} (\{\Phi\}^T [A] \{\Phi\}) = 2[A] \{\Phi\}. \quad (\text{Б2})$$

## ОТВЕТЫ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

2.  $R=4$ .

3. См. фиг. 7.6.

5. См. фиг. 8.6 и 8.8 для аналогичного примера.

11. а)  $N_i = (4,5 - x)/2,5$ ,  $N_j = (x - 2)/2,5$ .

в)  $N_i = \frac{1}{3} [-1 + 2y]$ ,

$$N_j = \frac{1}{3} \left[ 4,25 - \frac{3}{2} x - y \right],$$

$$N_k = \frac{1}{3} \left[ -0,25 + \frac{3}{2} x - y \right].$$

$$12. N_i = \left( 0,5 - \frac{s}{L} \right), \quad N_j = \left( 0,5 + \frac{s}{L} \right).$$

$$13. \text{Сторона } ij \quad x = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{24}.$$

$$\text{Сторона } ik \quad x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

$$17. N_i = \frac{1}{3} [3 - 2x + y - z].$$

$$N_j = \frac{1}{3} [x + y - z],$$

$$N_k = \frac{1}{3} [2x - 4y + z],$$

$$N_l = \frac{1}{3} [-x + 2y + z].$$

18. Сумма коэффициентов должна равняться нулю.

$$19. \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \frac{1}{3} [-2\Phi_i + \Phi_j + 2\Phi_k - \Phi_l].$$

$$20. u = 1,38 \text{ мм}, \quad v = 6,55 \text{ мм},$$

$$N_i = \frac{7}{44}, \quad N_j = \frac{12}{44}, \quad N_k = \frac{25}{44} \text{ в точке } B.$$

$$21. \quad \frac{\mathcal{L}_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$22. \quad \frac{tA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$$23. \text{Элемент 1: } i=1, \quad j=2,$$

$$\text{элемент 2: } i=2, \quad j=3,$$

$$\text{элемент 3: } i=3, \quad j=4,$$

$$\text{элемент 4: } i=4, \quad j=5.$$

$$25. \text{Элемент 1: } i=1, \quad j=2, \quad k=4,$$

$$\text{элемент 2: } i=4, \quad j=2, \quad k=5,$$

элемент 3:  $i=2, j=3, k=5$ ,

элемент 4:  $i=4, j=5, k=6$ .

$$27. \Phi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_3^{(1)}\Phi_2,$$

$$\Phi^{(2)} = N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3,$$

$$\Phi^{(3)} = N_3^{(3)}\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4,$$

$$\Phi^{(4)} = N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5,$$

$$31. u^{(1)} = N_1^{(1)}U_1 + N_2^{(1)}U_3 + N_4^{(1)}U_7,$$

$$v^{(1)} = N_1^{(1)}U_2 + N_2^{(1)}U_4 + N_4^{(1)}U_8,$$

$$u^{(2)} = N_2^{(2)}U_3 + N_4^{(2)}U_7 + N_5^{(2)}U_9,$$

$$v^{(2)} = N_2^{(2)}U_4 + N_4^{(2)}U_8 + N_5^{(2)}U_{10},$$

$$u^{(3)} = N_2^{(3)}U_3 + N_3^{(3)}U_5 + N_5^{(3)}U_9,$$

$$v^{(3)} = N_2^{(3)}U_4 + N_3^{(3)}U_6 + N_5^{(3)}U_{10}.$$

$$34. \Phi^{(1)} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \Phi_1 + \left(\frac{x}{2}\right) \Phi_2.$$

$$36. \Phi^{(1)} = \frac{4}{3} \left[ \left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y\right) \Phi_1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y\right) \Phi_2 + (y) \Phi_4 \right].$$

$$3. \begin{bmatrix} (C_1 + 2C_2) & (-C_1 + C_2) & 0 \\ (-C_1 + C_2) & (2C_1 + 4C_2) & (-C_1 + C_2) \\ 0 & (-C_1 + C_2) & (C_1 + 2C_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_3 - qA_1 \\ C_3 \\ C_3 \end{Bmatrix}.$$

$$C_1 = \frac{AK_{xx}}{L}, \quad C_2 = \frac{PhL}{6}, \quad C_3 = \frac{PhLT_\infty}{2}.$$

$$39. \begin{bmatrix} (C_1 + C_2) & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad C_1 = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{L^{(1)}}, \quad C_2 = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{L^{(2)}}.$$

$$40. \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \frac{ML^2}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$$43. \{R\} = \begin{Bmatrix} 48,33 \\ 96,67 \\ 0 \\ 96,67 \\ 48,33 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

45. Формула (6.20), стр. 96.

46. 
$$\begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 & -8 & 0 \\ -4 & 36 & -8 & -12 & -12 \\ 0 & -8 & 16 & 0 & -8 \\ -8 & -12 & 0 & 28 & -8 \\ 0 & -12 & -8 & -8 & 28 \end{bmatrix}.$$
48. 
$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & 10 & -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 10 & -8 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & -8 & 27 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}.$$
49. а)  $4U_1 + 2U_2 = 4,$   
 $7U_2 + 2U_3 = 6,$   
 $7,4386U_3 + 2U_4 = 6,2857,$   
 $3,4615U_4 = 2,3077.$   
 б)  $\{F\}^T = [6, 9, 9,4286, 3,4615],$   
 в)  $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 2/3,$   
 $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 1,$
- 51а.  $[3,0, -7,38, 18,18, -15,71, 17,86],$   
 $[0,29, 5,21, 0, 5,21, 0,29].$
- 51б.  $[3,0, -0,28, 14,10, 6,26],$   
 $[18,0, 0,5, 0, 3,5].$
- 51в.  $[3,0, 0,06, 1,33, 0,26, 0,38],$   
 $[1,29, 1,07, 0,0, 0,64, 0,57].$
62.  $[150, 84,5, 57,3, 46,5, 42,5, 41,4].$
65.  $\{k^{(e)}\} = \frac{AK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } K_{xx} = \frac{k_i + k_j}{2}.$
66. 
$$\begin{bmatrix} 39,56 & 7,07 & -5,42 \\ 7,07 & 35,81 & -1,67 \\ -5,42 & -1,67 & 6,68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 849,6 \\ 849,6 \\ 25,0 \end{Bmatrix}.$$
68. 
$$\begin{bmatrix} 60,41 & 2,72 & 19,33 \\ 2,72 & 1,36 & -4,08 \\ 19,33 & -4,08 & 67,21 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1291,4 \\ 27,3 \\ 1255,1 \end{Bmatrix}.$$

$$70. \quad \frac{2hA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{2hT_{\infty}A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$$71. \quad 33,33 \text{ Вт в узле } i, \\ 16,67 \text{ Вт в узле } j.$$

$$72. \quad \frac{th\mathcal{L}_{ij}}{12} \begin{bmatrix} (h_i + 3h_j) & (h_i + h_j) & 0 \\ (h_i + h_j) & (3h_i + h_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{t\mathcal{L}_{ij}T_{\infty}}{6} \begin{Bmatrix} (h_i + 2h_j) \\ (2h_i + h_j) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$74. \quad \frac{A}{L^2} (k_1 X_0 + (L - X_0) k_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$80. \quad [k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 12,22 & -1,44 & -10,78 \\ -1,44 & 9,38 & -7,94 \\ -10,78 & -7,94 & 18,72 \end{bmatrix}.$$

$$94. \quad \text{На срединной поверхности трубопровода } T = 550 \text{ К.}$$

$$\text{На внутренней поверхности изолятора } T = 538 \text{ К.}$$

$$\text{На срединной поверхности изолятора } T = 349 \text{ К.}$$

$$95. \quad \begin{bmatrix} (R_j^4 + 8R_i^3R_j - 6R_i^2R_j^2 - 3R_i^4) & (R_j^4 - 2R_i^3R_j + 2R_jR_i^3 - R_i^4) \\ \text{Симметрично} & (3R_j^4 - 8R_i^3R_j + 6R_j^2R_i^2 - R_i^4) \end{bmatrix}, \\ \{f\} = \frac{2\pi hT_{\infty}}{3(R_j - R_i)} \begin{Bmatrix} (R_j^3 - 3R_i^2R_j + 2R_i^3) \\ (2R_j^3 - 3R_iR_j^2 + R_i^3) \end{Bmatrix}.$$

$$96a.$$

$$\overline{T} = \frac{\sum_{e=1}^E \frac{\pi}{3(R_j - R_i)} [(R_j^3 - 3R_i^2R_j + 2R_i^3) T_i + (2R_j^3 - 3R_iR_j^2 + R_i^3) T_j]}{\sum_{e=1}^E \pi (R_j^2 - R_i^2)}.$$

$$96b.$$

$$\overline{T} = \frac{\sum_{e=1}^E \frac{\pi A^{(e)}}{6} [(2R_i + R_j + R_k) T_i + (R_i + 2R_j + R_k) T_j + (R_i + R_j + 2R_k) T_k]}{\sum_{e=1}^E \frac{2\pi A^{(e)}}{3} (R_i + R_j + R_k)}.$$

97. Точные значения                      Приближенные значения

$$\{f\} = AQ \begin{Bmatrix} 1016 \\ 1134 \\ 1114 \end{Bmatrix} \qquad \{f\} = AQ \begin{Bmatrix} 839 \\ 1104 \\ 1080 \end{Bmatrix}$$

98. 
$$\{f\} = \frac{\pi h T_{\infty} L}{3} \begin{Bmatrix} (2R_i + R_k) \\ 0 \\ (R_i + 2R_k) \end{Bmatrix}.$$

99. 
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} 152110 \\ 347031 \\ 336080 \end{Bmatrix}.$$

100. 
$$[k] = \begin{bmatrix} 19398 & -12344 & -7054 \\ -12344 & 16208 & -3363 \\ -7054 & -3363 & 10900 \end{bmatrix}.$$

111.  $\sigma_{xx} = 22669, \quad \sigma_{yy} = -879,1, \quad \gamma_{xy} = -94,7.$

113.  $\sigma_{xx} = 9939,6, \quad \sigma_{yy} = 651,3, \quad \gamma_{xy} = -3247,2$

115.  $\sigma_{xx} = 47578, \quad \sigma_{yy} = 1680,7, \quad \gamma_{xy} = -4296,9.$

116. 
$$\{f\} = \frac{p_0 t \mathcal{L}_{jk}}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

117. 
$$\{f\} = \frac{p_0 t \mathcal{L}_{jk}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

118. 
$$[k^{(e)}] = 10^8 \begin{bmatrix} -1,469 & 0 & -1,624 & 0,580 & -0,077 & -0,580 \\ & 0,483 & 0,483 & -0,483 & -0,483 & 0 \\ & & 2,533 & -1,353 & -0,271 & 0,870 \\ & & & 2,175 & 0,338 & -1,692 \\ & & & & 0,551 & 1,450 \\ & & & & & 1,692 \end{bmatrix}.$$
  
Симметрично

119.

$$\{f\} = \frac{\pi p_0 \mathcal{L}_{ik}}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ (R_i + R_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (R_i + 3R_k) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

131.  $N_i = (3x - L)(x - L)/L^2,$

$$N_j = -9x(x - L)/2L^2,$$

$$N_k = x(3x - L)/2L^2.$$

133.  $-0,8.$

134.  $-1,6.$

135.

$$\{f\} = \frac{P \mathcal{L}_{il}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

136.

$$\{f\} = \frac{P \mathcal{L}_{ik} h_0 T_\infty}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

137.  $[k^{(e)}] = \frac{K_{xx}}{6L} \begin{bmatrix} (A_i + A_j + A_k) & -(A_i + 4A_j + A_k) \\ \text{Симметрично} & (A_i + 4A_j + A_k) \end{bmatrix}.$

138.  $2,667.$

139.  $1,733.$

147.  $N_{11} = 4L_1 L_3 (4L_1 - 1)(4L_3 - 1).$

148.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$

149.  $\begin{bmatrix} (-4 - 4L_2) & -3 \\ (4 - 4L_1 - 8L_2) & -5 \end{bmatrix}.$

151.  $-5/24, \quad 1/6.$

153.  $-10/9.$

162.  $N_1 = -\frac{\xi}{4} (1 - \xi) (1 - \eta),$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta),$$

$$N_3 = \frac{\xi}{4} (1 + \xi) (1 - \eta),$$

$$N_4 = \frac{\xi}{4} (1 + \xi) (1 - \eta),$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta),$$

$$N_6 = -\frac{\xi}{4} (1 - \xi) (1 + \eta).$$

164. 420/535, -16/535.

$$176. \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} + \frac{aT_e}{3}\right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{aT_e}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{aT_e}{6}\right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{aT_e}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \frac{bT_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

$$179. \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{T_e} - \frac{a}{2} + \frac{bT_e}{3}\right) & \left(\frac{1}{T_e} + \frac{a}{2} + \frac{bT_e}{6}\right) \\ \left(\frac{1}{T_e} - \frac{a}{2} + \frac{bT_e}{6}\right) & \left(-\frac{1}{T_e} + \frac{a}{2} + \frac{bT_e}{3}\right) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \frac{cT_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} y' \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Член  $y'$  встречается только в уравнениях для элемента, соответствующего первому временному шагу.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ансамбль** 62  
**Аппроксимации сопряженной теория** 101
- Вариационное исчисление** 376  
**Весовой коэффициент** 258  
**Входные данные** 346
- Галёркина метод** 323  
**Гаусса — Лежандра квадратура** 259  
**Гаусса метод исключения** 112  
**Генератор данных элемента** 122  
**Гаука закон** 83
- Данные соединения** 345  
**Дискретизация области** 17  
**Дифференцирование матричных соотношений** 380  
**Длина дуги** 321
- Задача Коши** 323, 333
- Интегрирование численное** 257  
**Источник линейный** 152  
— **локализованный внутри элемента** 156  
— **точечный** 152  
**Исходные данные соединения** 345
- Карта с параметрами** 346  
**Квадратура Гаусса — Лежандра** 259  
— **Ньютона — Котеса** 258  
**Комплекс-элемент** 30  
**Координат преобразования** 253  
— **система естественная** 253  
**Координаты радиальные** 190  
— **объемные** 60  
— **плоские** 47  
**Кранка — Никольсона разностная схема** 208
- Массив одномерный** 120  
**Матрица градиентов** 93, 144, 183, 212, 222, 248  
— **жесткости глобальная** 71, 105  
— — **сингулярная** 235  
— **ленточная** 109  
— **упругих констант** 223  
— — **характеристик** 227, 229  
— **элемента** 92  
— **демпфирования** 203  
— **Якоби** 253  
**Метод прямой жесткости** 106  
— **исключения** 113  
**Модификация системы уравнений** 141, 336  
**Мультиплекс-элемент** 30
- Нумерация узлов** 25  
**Ньютона — Котеса квадратура** 258
- Обратная прогонка** 113  
**Остроградского — Гаусса теорема** 330
- Подпрограммы для ленточной матрицы** 353  
**Полином** 10  
— **интерполяционный** 30  
— — **для дискретизованной области** 59  
— — **линейный** 30  
**Призма прямоугольная** 308  
**Программы учебные** 341  
**Производные функций формы** 275, 300
- Результующая система уравнений** 110, 187  
**Решение конечно-разностное** 205
- Симметрия геометрическая** 188  
— **осевая** 18  
— **радиальная** 181  
— **центральная** 181  
**Симплекс-элемент** 27  
— — **двумерный** 34, 203  
— — **одномерный** 31, 203  
— — **трехмерный** 39, 204  
**Симпсона формула** 258  
**Система координат глобальная** 44  
— — **локальная** 44  
— — **местная** 44  
— **уравнений дифференциальных первого порядка** 336  
— — **модифицированная** 252  
**Соотношения, определяющие элементы** 303  
**Степень свободы** 60  
— — **глобальная** 107
- Теория согласованных напряжений** 204  
— — **результантов** 217  
**Типичный элемент** 14  
**Титульная карта** 346  
**Триангуляризация** 209
- Узел** 10  
— **глобальный** 268  
**Узловая точка** 10  
**Узловые значения** 14  
**Уравнение матричное** 336  
— **квазигармоническое** 74  
**Уравнения метода конечных элементов** 73  
**Устойчивость численная** 208
- Функция базисная** 296  
— **единичная импульсная** 152  
— **полевая** 189  
— **формы** 32, 61  
— — **для элементов высокого давления** 271  
— **элемента** 11  
— **линейная** 12
- Шаг временной** 209  
**Шарнир неподвижный** 24  
— **подвижный** 24  
**Ширина полосы матрицы** 25
- Элемент** 10  
— **высокого порядка** 242, 312  
— **двумерный** 18  
— **изопараметрический** 263  
— **квадратичный** 18, 243  
— **комплекс** 30  
— **криволинейный** 14  
— **кубичный** 18, 243  
— **линейный** 137  
— **мультиплекс** 30  
— **одномерный** 17, 46  
— **осесимметричный** 204  
— **радиальный** 204  
— **симплекс** 27  
— **субпараметрический** 263  
— **суперпараметрический** 263  
— **тетраэдральный** 280  
— **типичный** 14  
— **треугольный** 270  
— **трехмерный** 18  
— **четырёхугольный** 289  
— — **квадратичный** 294  
— — **кубичный** 294  
— — **линейный** 289

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Метод конечных элементов . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Основная концепция метода конечных элементов . . . . .	10
1.2. Преимущества и недостатки. . . . .	14
1.3. Структура книги . . . . .	15
Литература . . . . .	16
<b>Глава 2. Дискретизация области . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1. Типы конечных элементов . . . . .	17
2.2. Разбиение области на элементы . . . . .	21
2.3. Нумерация узлов . . . . .	27
2.4. Заключение . . . . .	27
Литература . . . . .	29
<b>Глава 3. Линейные интерполяционные полиномы . . . . .</b>	<b>30</b>
3.1. Одномерный симплекс-элемент . . . . .	31
3.2. Двумерный симплекс-элемент . . . . .	34
3.3. Трехмерный симплекс-элемент . . . . .	39
3.4. Интерполирование векторных величин . . . . .	42
3.5. Местная система координат . . . . .	44
3.6. Свойства интерполяционного полинома . . . . .	51
Литература . . . . .	58
<b>Глава 4. Интерполяционные полиномы для дискретизованной области . . . . .</b>	<b>59</b>
4.1. Скалярные величины . . . . .	59
4.2. Векторные величины . . . . .	63
4.3. Выводы . . . . .	64
<b>Глава 5. Рассмотрение некоторых краевых задач с помощью метода конечных элементов . . . . .</b>	<b>66</b>
5.1. Простой пример: перенос тепла в стержне . . . . .	67
5.2. Повторное рассмотрение примера . . . . .	72
5.3. Уравнения метода конечных элементов: задачи теории поля . . . . .	73
5.4. Уравнения метода конечных элементов: теория упругости . . . . .	79
Литература . . . . .	88
<b>Глава 6. Кручение стержня некругового сечения . . . . .</b>	<b>89</b>
6.1. Общая теория кручения стержня . . . . .	89
6.2. Построение матриц элементов . . . . .	92
6.3. Стандартные результаты элемента . . . . .	98

6.4. Согласованные результаты элемента	101
Литература	104
<b>Глава 7. Реализация метода конечных элементов на ЭВМ</b>	<b>105</b>
7.1. Прямое построение глобальной матрицы жесткости	105
7.2. Система линейных уравнений	108
7.3. Общая блок-схема вычислений	116
7.4. Решение задачи о кручении бруса с помощью вычислительной машины	122
Литература	133
<b>Глава 8. Перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции</b>	<b>134</b>
8.1. Уравнения переноса тепла	134
8.2. Одномерный случай переноса тепла	136
8.3. Двумерный перенос тепла	144
8.4. Трехмерный случай переноса тепла	150
8.5. Преобразования координат	151
8.6. Точечные источники	152
8.7. Машинная реализация	156
Литература	165
<b>Глава 9. Гидромеханика, безвихревое течение</b>	<b>166</b>
9.1. Двумерный случай течения грунтовых вод	166
9.2. Рассмотрение задачи о течении грунтовых вод с помощью ЭВМ	168
9.3. Безвихревое течение идеальной жидкости	173
9.4. Заключение	178
Литература	180
<b>Глава 10. Радиальные и осесимметрические задачи теории поля</b>	<b>181</b>
10.1. Симметрические двумерные задачи теории поля	181
10.2. Осесимметрические задачи теории поля	188
10.3. Машинная реализация	196
Литература	199
<b>Глава 11. Нестационарные задачи теории поля</b>	<b>200</b>
11.1. Соотношения, определяющие элементы	200
11.2. Матрица демпфирования элемента	203
11.3. Конечно-разностное решение дифференциальных уравнений	205
11.4. Численная устойчивость и колебания	209
11.5. Решение задач на ЭВМ	210
Литература	210
<b>Глава 12. Механика деформируемого твердого тела. Теория упругости.</b>	<b>211</b>
12.1. Теория упругости. Одномерный случай	212
12.2. Двумерные задачи теории упругости	218
12.3. Трехмерные задачи теории упругости	226
12.4. Осесимметрические задачи теории упругости	229
12.5. Решение с помощью ЭВМ	234
Литература	241
<b>Глава 13. Элементы высокого порядка. Одномерный элемент</b>	<b>242</b>
13.1. Квадратичные и кубические элементы	243
13.2. Применение квадратичного элемента	247

13.3. Естественная система координат. Преобразования координат. Матрица Якоби . . . . .	253
13.4. Применение численного интегрирования при определении матриц элемента . . . . .	257
13.5. Субпараметрические, изопараметрические и суперпараметрические элементы . . . . .	263
Литература . . . . .	269
<b>Глава 14. Треугольный и тетраэдральный элементы высокого порядка</b> . . . . .	<b>270</b>
14.1. Функции формы для элементов высокого порядка . . . . .	271
14.2. Вычисление производных функций формы . . . . .	275
14.3. Составление матриц элементов . . . . .	278
14.4. Тетраэдральные элементы . . . . .	284
Литература . . . . .	288
<b>Глава 15. Четырехугольные элементы</b> . . . . .	<b>289</b>
15.1. Линейный четырехугольный элемент . . . . .	289
15.2. Квадратичные и кубичные четырехугольные элементы . . . . .	294
15.3. Вычисление производных функций формы . . . . .	300
15.4. Соотношения, определяющие элементы . . . . .	303
15.5. Прямоугольные призмы . . . . .	308
<b>Глава 16. Элементы высокого порядка. Машинная реализация</b> . . . . .	<b>312</b>
16.1. Машинная реализация . . . . .	312
16.2. Примеры применения . . . . .	315
16.3. Криволинейные границы . . . . .	320
<b>Глава 17. Вывод уравнений для элементов с помощью метода Галёркина</b> . . . . .	<b>323</b>
17.1. Метод Галёркина . . . . .	323
17.2. Изгиб балки . . . . .	324
17.3. Двумерные уравнения теории поля . . . . .	329
17.4. Задача Коши . . . . .	333
17.5. Система дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	336
17.6. Заключение . . . . .	339
Литература . . . . .	340
<b>Глава 18. Учебные программы</b> . . . . .	<b>341</b>
18.1. GRID . . . . .	342
18.2. Подпрограммы для ленточной матрицы . . . . .	353
18.3. Обозначения . . . . .	356
18.4. Программа TORSION . . . . .	357
18.5. CONSTR . . . . .	361
18.6. FLDMCH . . . . .	363
18.7. TDHEAT . . . . .	363
18.8. STRESS . . . . .	369
Литература . . . . .	373
<b>Глава 19. Заключительные замечания</b> . . . . .	<b>374</b>
<b>Приложение А. Некоторые аспекты вариационного исчисления</b> . . . . .	<b>376</b>
<b>Приложение Б. Дифференцирование матричных соотношений</b> . . . . .	<b>380</b>
<b>Ответы к некоторым задачам</b> . . . . .	<b>381</b>
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>389</b>

---

253

257

263

269

270

271

275

278

284

288

289

289

294

300

303

308

312

312

315

320

323

323

324

329

333

336

339

340

341

342

353

356

357

361

363

363

369

373

374

376

380

381

389





15.80 k.

Д. СЕРГЕЕВ

СЕРГЕЕВ

Д. СЕРГЕЕВ

Д. СЕРГЕЕВ

Д. СЕРГЕЕВ